

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 18 aprile 1926

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulla quadratura delle superficie.* Nota del
Corrisp. LEONIDA TONELLI⁽¹⁾.

Proseguendo la ricerca iniziata nella Nota precedente⁽²⁾, dimostrerò
qui che, *se la superficie*

$$(1) \quad z = f(x, y)$$

- dove $f(x, y)$ è una funzione continua, data nel quadrato Q di vertici opposti $(0, 0)$ e $(1, 1)$ - è ad area finita S (la definizione di area di una superficie essendo quella di Lebesgue), si ha sempre

$$(2) \quad \iint_Q \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy \leq S.$$

1. Indichiamo con $V_{(y)}(\bar{x}, y)$ la variazione totale della funzione, della sola $y, f(\bar{x}, y)$, nell'intervallo $(0, y)$; e definiamo in modo analogo $V_{(x)}(x, y)$.

Dall'ipotesi (che conserveremo per tutta la presente Nota) che la superficie (1) sia ad area finita S , segue, per quanto si è stabilito nella Nota I, che, per quasi tutti i valori di x dell'intervallo $(0, 1)$, la funzione $V_{(y)}(x, y)$ è finita per ogni y di $(0, 1)$. Pertanto, la derivata par-

(1) Presentata nella seduta dell'11 aprile 1926.

(2) Questi « Rendiconti », vol. III (1926), p. 357.

ziale $q = \partial f / \partial y$ esiste finita quasi dappertutto in Q . Di più, essendo, per quasi tutti gli x di $(0, 1)$, $\int_0^1 |q| dy \leq V_{(y)}(x, 1)$, e risultando (Nota I) integrabile la $V_{(y)}(x, 1)$, si ha facilmente l'integrabilità di $q(x, y)$ in tutto Q . Si ha, in modo analogo, l'esistenza e la finitezza quasi dappertutto di $p = \partial f / \partial x$, e la sua integrabilità in Q , ed anche, perciò, l'integrabilità, in Q , di $\sqrt{1 + p^2 + q^2}$. Tutto ciò fu già dimostrato dal dottore Lampariello ⁽¹⁾.

2. Dividiamo i lati di Q che si trovano sugli assi x e y in parti, mediante i punti $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_r < \dots < x_m = 1$, $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_s < \dots < y_n = 1$, e considerato il rettangolo

$R_{r,s} [x_{r-1} \leq x \leq x_r, y_{s-1} \leq y \leq y_s]$, ($r = 1, 2, \dots, m$; $s = 1, 2, \dots, n$), poniamo

$$\alpha_{r,s} = \int_{x_{r-1}}^{x_r} \left\{ V_{(y)}(x, y_s) - V_{(y)}(x, y_{s-1}) \right\} dx,$$

$$\beta_{r,s} = \int_{y_{s-1}}^{y_s} \left\{ V_{(x)}(x_r, y) - V_{(x)}(x_{r-1}, y) \right\} dy.$$

Definito allora il numero positivo $a_{r,s}$ con l'uguaglianza

$$a_{r,s}^2 = R_{r,s}^2 + \alpha_{r,s}^2 + \beta_{r,s}^2$$

(qui $R_{r,s}$ indica l'area del rettangolo considerato), formiamo la somma $\Sigma a_{r,s}$, estesa a tutti i valori $r = 1, 2, \dots, m$, $s = 1, 2, \dots, n$, e indichiamo con A il limite superiore di tutti i valori che questa somma può assumere. Dimostreremo che A è finito e che, al tendere a zero di tutte le differenze $x_r - x_{r-1}$ e $y_s - y_{s-1}$, la somma $\Sigma a_{r,s}$ tende ad A .

3. A tal fine ci servirà un lemma relativo alle funzioni di rettangolo. Sia $F(R)$ una funzione definita per ogni rettangolo R , a lati paralleli agli assi x e y , contenuto nel quadrato Q , e supponiamo che essa soddisfi alle seguenti condizioni: 1) sia sempre $F(R) \geq 0$; 2) per ogni decomposizione di R in due rettangoli R_1 e R_2 , pure a lati paralleli agli assi x e y , risulti $F(R) \leq F(R_1) + F(R_2)$; 3) preso ad arbitrio un $\sigma > 0$, sia possibile di determinare un $\lambda > 0$ tale che, per ogni gruppo di rettangoli R_1, R_2, \dots, R_v , non sovrapponentisi, a lati paralleli agli assi x e y , e tutti contenuti in una striscia di altezza $\leq \lambda$ ed a lati paralleli o all'asse x o all'asse y , si abbia $\sum_i F(R_i) < \sigma$.

(1) Questi « Rendiconti », vol. III (1926), p. 294.

Dividiamo il quadrato Q in rettangoli $R_{r,s}$, mediante due sistemi di parallele all'asse x e all'asse y , e formiamo la somma $\sum F(R_{r,s})$ estesa a tutti i rettangoli della suddivisione. Sia L il limite superiore (finito o no) di tutte le possibili somme $\sum F(R_{r,s})$. Abbiamo allora il seguente lemma: « Preso ad arbitrio un $\eta > 0$, è possibile determinare un $\lambda > 0$ tale che, per ogni decomposizione di Q in rettangoli $R_{r,s}$ aventi tutti il massimo lato $< \lambda$, si abbia $L - \eta < \sum F(R_{r,s}) \leq L$, se L è finito, $\sum F(R_{r,s}) > 1 : \eta$, se L è infinito ». La dimostrazione di questo lemma si ottiene ripetendo il ragionamento della pag. 38 del 1° vol. dei miei *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*.

4. Il limite superiore A , definito nel n. 2, è sicuramente finito, perchè, avendosi $a_{r,s} \leq R_{r,s} + \alpha_{r,s} + \beta_{r,s}$, è sempre

$$\sum a_{r,s} \leq 1 + \int_0^1 V_{(y)}(x, 1) dx + \int_0^1 V_{(x)}(1, y) dy.$$

In base poi al lemma del numero precedente, si ha che, al tendere a zero di tutte le differenze $x_r - x_{r-1}$ e $y_s - y_{s-1}$, $\sum a_{r,s}$ tende ad A .

5. Vogliamo ora confrontare il valore del limite A con quello dell'area S della superficie (1).

Supponiamo, in primo luogo, che la (1) sia una superficie poliedrica. In questo caso l'area S risulta evidentemente uguale alla somma delle aree delle facce della superficie. Se indichiamo con $S_{r,s}$ la parte di S corrispondente al rettangolo $R_{r,s}$ ed osserviamo che $\alpha_{r,s}$ dà la somma delle proiezioni ortogonali sul piano (x, z) di tutte le facce che concorrono a formare $S_{r,s}$, mentre $\beta_{r,s}$ dà quella delle proiezioni sul piano (y, z) , abbiamo $S_{r,s} \cong \sqrt{R_{r,s}^2 + \alpha_{r,s}^2 + \beta_{r,s}^2} = a_{r,s}$, e perciò $S = \sum S_{r,s} \cong \sum a_{r,s}$. Di qui segue immediatamente che il limite superiore A delle somme $\sum a_{r,s}$ verifica la disuguaglianza $A \leq S$. Osserviamo che questa disuguaglianza vale anche per le superficie poliedriche non rappresentabili nella forma (1)⁽¹⁾.

6. Per estendere la disuguaglianza ora dimostrata a tutte le superficie (1), continue e ad area finita, ci occorre di mettere in evidenza una proprietà degli integrali $\int_0^1 V_{(y)}(x) dx$ e $\int_0^1 V_{(x)}(y) dy$ ⁽²⁾.

Riprendiamo il ragionamento del n. 1 della Nota I, e indichiamo con I il minimo limite dell'integrale $\int_0^1 \lambda_m(x) dx$ per $m \rightarrow \infty$. Come dicemmo

(1) In questo caso la funzione $V_{(y)}(\bar{x}, \bar{y})$ rappresenterà la somma delle proiezioni ortogonali, sul piano (x, z) , di tutti i lati della sezione, col piano $x = \bar{x}$, della superficie poliedrica, limitata al piano $y = \bar{y}$. E analogamente per $V_{(x)}(x, \bar{y})$.

(2) Vedi l'introduzione della Nota I.

al luogo citato, preso un $\varepsilon > 0$, e fissato un n , possiamo determinare un m tale che, per ogni $m > \bar{m}$, sia $\int_0^1 \lambda_m(x) dx \cong \int_0^1 l_n(x) dx - \varepsilon$.

È allora $\int_0^1 l_n(x) dx \leq I + \varepsilon$, e per $n \rightarrow \infty$, $\int_0^1 L_{(y)}(x) dx \leq I + \varepsilon$, ed

anche, essendo ε arbitrario, $\int_0^1 L_{(y)}(x) dx \leq I$. Ripetendo lo stesso ragionamento per la funzione $V_{(y)}(x)$, in luogo della $L_{(y)}(x)$, otteniamo che, se $I_{(y)}$ rappresenta il minimo limite, per $v \rightarrow \infty$, del valore dell'integrale

$\int_0^1 V_{(y)}(x) dx$, calcolato sulle superficie poliedriche $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_v, \dots$, considerate nel n. 1 della Nota I, il valore dello stesso integrale relativo alla superficie (I) soddisfa alla disuguaglianza $\int_0^1 V_{(y)}(x) dx \leq I_{(y)}$.

La proprietà espressa da questa disuguaglianza - semicontinuità inferiore, sulla superficie (I) e relativamente alle superficie Σ_v , dell'integrale

$\int_0^1 V_{(y)}(x) dx = \int_0^1 V_{(y)}(x, I) dx$ - vale anche su ogni rettangolo interno al

quadrato Q; essa vale pure per l'integrale $\int_0^1 V_{(x)}(y) dy = \int_0^1 V_{(x)}(I, y) dy$.

7. Dopo di ciò, possiamo dimostrare la disuguaglianza $A \leq S$ nel caso generale.

Sia $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_v$, una successione di superficie poliedriche tendenti alla (I) e tale che la successione delle loro aree $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_v, \dots$ tenda all'area S della (I). Indichiamo con $a_{r,s}^{(v)}$ l'espressione $a_{r,s}$, relativa alla superficie Σ_v , e osserviamo che, dalla semicontinuità inferiore stabilita nel numero precedente, segue quella di $a_{r,s}$. Scelto dunque un $\varepsilon > 0$, ad arbitrio, possiamo determinare un \bar{v} tale che, per ogni $v > \bar{v}$, sia $\sum a_{r,s}^{(v)} > \sum a_{r,s} - \varepsilon$, le somme essendo estese a tutti i valori di r da 1 ad m , ed a tutti i valori di s da 1 ad n . Ma il limite superiore della somma $\sum a_{r,s}^{(v)}$ è, per quanto si è dimostrato nel n. 5, $\leq \sigma_v$; è dunque $\sum a_{r,s} < \sigma_v + \varepsilon$. E siccome $\sigma_v \rightarrow S$, per $v \rightarrow \infty$, è anche $\sum a_{r,s} \leq S + \varepsilon$. Essendo ε positivo ma arbitrario, è pure $\sum a_{r,s} \leq S$. Da ciò segue che il limite superiore A delle somme $\sum a_{r,s}$ soddisfa alla disuguaglianza $A \leq S$.

8. È necessario, per il seguito, di considerare la derivata totale della funzione $F(x, y) = \int_0^x V_{(y)}(x, y) dx$. Posto $\Delta F = F(x + h, y + h) - F(x + h, y - h) - F(x - h, y + h) + F(x - h, y - h)$, diremo derivata totale della $F(x, y)$, nel punto (x, y) , il limite, se esiste, del rapporto $\Delta F : 4h^2$, per $h \rightarrow 0$. Tale derivata sarà indicata con $DF(x, y)$.

Siccome la funzione $V_{(y)}(x, y)$ è sempre ≥ 0 ed è non decrescente come funzione della sola x , e pure non decrescente come funzione della sola y , si ha sempre

$$\Delta F = \int_{x-h}^{x+h} \left\{ V_{(y)}(x, y+h) - V_{(y)}(x, y-h) \right\} dx \geq 0,$$

e la $F(x, y)$ è perciò, in Q , una funzione a variazione limitata secondo la definizione del Vitali ⁽¹⁾ o, come noi diremo, a *variazione doppia limitata* ⁽²⁾. Esiste dunque finita, quasi dappertutto in Q , la derivata totale DF ⁽³⁾. Ma è, per quasi tutti i valori di x di $(0, 1)$,

$$V_{(y)}(x, y+h) - V_{(y)}(x, y-h) \geq \int_{y-h}^{y+h} |q| dy;$$

è dunque sempre

$$\Delta F \geq \Delta \int_0^x dx \int_0^y |q| dy.$$

E siccome si ha ⁽⁴⁾

$$\int_0^x dx \int_0^y |q| dy = \int_0^x \int_0^y |q| dx dy,$$

ed il secondo membro ammette, quasi dappertutto, $|q|$ per derivata totale ⁽⁵⁾, ne risulta che è, quasi dappertutto in Q , $DF \geq |q|$, ossia

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{4h^2} \int_{x-h}^{x+h} \left\{ V_{(y)}(x, y+h) - V_{(y)}(x, y-h) \right\} dx \geq |q(x, y)|.$$

Analogamente si ha, quasi dappertutto in Q ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{4h^2} \int_{y-h}^{y+h} \left\{ V_{(x)}(x+h, y) - V_{(x)}(x-h, y) \right\} dy \geq |p(x, y)|.$$

Da ciò segue che la radice quadrata dell'espressione

$$(3) \quad 16h^4 + \left\{ \int_{x-h}^{x+h} [V_{(y)}(x, y+h) - V_{(y)}(x, y-h)] dx \right\}^2 + \\ + \left\{ \int_{y-h}^{y+h} [V_{(x)}(x+h, y) - V_{(x)}(x-h, y)] dy \right\}^2,$$

(1) *Sui gruppi di punti, ecc.*, « Atti R. Accad. delle Scienze di Torino », vol. XLIII, (1907-908). V. anche: H. LEBESGUE, *Sur l'intégration des fonctions discontinues*, « Annales de l'Ecole Norm. Sup. », t. 27 (1910); CH. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Intégrales de Lebesgue, etc.* (Paris, Gauthier-Villars, 1916).

(2) Essa è anche a *variazione limitata* secondo la nostra definizione, data nella Nota I.

(3) V. loc. cit., in (1).

(4) L. TONELLI, *Sull'integrazione per parti*, questi « Rendiconti », vol. XVIII (1909).

(5) V. loc. cit., in (1).

divisa per $4h^2$, ha un limite determinato e finito, per $h \rightarrow 0$, in quasi tutto Q , e che questo limite è $\equiv \sqrt{1 + p^2 + q^2}$.

9. Il numero A , definito nel n. 2, quando sia determinato in corrispondenza, non del quadrato Q , ma del rettangolo di vertici opposti $(0, 0)$ e (x, y) , diventa una funzione $A(x, y)$, continua, soddisfacente alla disuguaglianza $\Delta A > 0$. Questa funzione è dunque a *variazione doppia limitata* ed ammette così la derivata totale DA finita, in quasi tutto Q . Inoltre ⁽¹⁾ la derivata DA è integrabile in Q e si ha sempre

$$\Delta A \equiv \int_{x-h}^{x+h} \int_{y-h}^{y+h} DA \, dx \, dy.$$

Ma, per la stessa definizione di $A(x, y)$, ΔA è maggiore o uguale alla radice quadrata dell'espressione (3), e da quanto abbiamo detto alla fine del n. precedente segue perciò che, in quasi tutto Q , è $DA \equiv \sqrt{1 + p^2 + q^2}$.

È dunque, sempre,

$$\Delta A \equiv \int_{x-h}^{x+h} \int_{x-h}^{x+h} \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy,$$

donde

$$A = A(1, 1) \equiv \iint_Q \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy.$$

Di qui e da quanto si è dimostrato nel n. 7, si deduce la (2).

Chimica. — *Sopra le anomalie di alcune reazioni.* Nota del Socio A. ANGELI ⁽²⁾.

In alcune comunicazioni fatte a questa Accademia io ho avuto più volte occasione di porre in rilievo le notevoli analogie di comportamento che sovente si riscontrano in composti nei quali due residui A e B sono direttamente riuniti fra di loro, quando si trovano nella posizione orto ovvero para di un anello aromatico oppure, infine, quando sono separati da catene non sature caratteristiche.

Come è noto io ho attribuito questo rimarchevole comportamento ad una forma di « conducibilità » posseduta dall'anello aromatico e dai doppi legami.

Nei casi esaminati in precedenza io ho preso in considerazione solamente quelle reazioni che vengono favorite ovvero provocate dalla presenza di uno dei due sostituenti: ma subito si comprende che si doveva verificare anche il caso inverso, vale a dire che un dato sostituyente poteva ostacolare ovvero anche impedire le reazioni dell'altro sostituyente, cioè il compiersi di un processo che in sua assenza procede invece in modo del tutto normale.

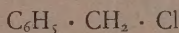
(1) V. loc. cit., in (1) alla pag. prec.

(2) Presentata nella seduta del 21 marzo 1926.

Naturalmente qui non si tratta di qualcuno degli impedimenti dovuti a causa sterica, come quelli che Victor Meyer, nel corso delle sue classiche ricerche, ha riscontrato in molti composti aromatici ortobisostituiti; infatti nei composti aromatici cui io mi riferisco non sono contenuti altri sostituenti in posizione orto, ovvero tutto al più in posizione orto ne contengono uno soltanto e perciò non entrano nella categoria di quelli studiati da V. Meyer. Questo curioso comportamento rende molto probabile che i due sostituenti in parola sieno fra di loro impegnati in modo più intimo di quanto le nostre attuali formole di struttura lasciano intendere.

Nelle righe che seguono riporterò alcuni esempi che ho desunti in gran parte dalla letteratura, ovvero che sono stati osservati nel corso di alcune ricerche eseguite in questo Laboratorio dal prof. D. Bigiavi e da me.

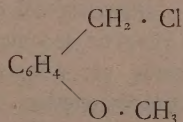
Le reazioni di alcuni derivati alogenati. Si sa che il cloruro di benzile.



è abbastanza stabile all'azione dell'acqua e dell'alcool, non è lagrimogeno e reagisce facilmente col magnesio in soluzione eterea per dare il corrispondente composto organomagnesiaco.

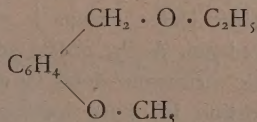
Tale comportamento si capovolge addirittura quando, nelle posizioni orto ovvero para, rispetto al residuo che porta l'alogeno, si trovino alcossili.

Così il composto, ortosostituito ⁽¹⁾:

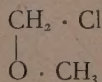


ha odore pungente ed attacca fortemente le mucose, per azione dell'acqua si decompone subito con formazione di acido cloridrico; la perdita di acido cloridrico avviene anche sulla sostanza secca e pura che si trasforma così in una massa vetrosa colorata in roseo.

Quando si tratta con cianuro di potassio in soluzione alcoolica, oltre al cianuro corrispondente si ottiene anche il derivato:

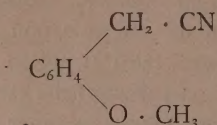


il quale proviene dalla diretta azione dell'alcool sopra il cloruro. Come ho già posto in rilievo in altra occasione, lo stesso comportamento viene presentato dal cloruro:



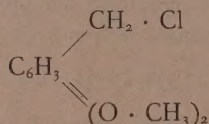
(1) PSCHORR, WOLFES, BUCKOW, « Berichte », 33 (1900), 166.

nel quale i due residui sostituenti sono direttamente riuniti fra di loro. Per la stessa ragione, il corrispondente cianuro:



possiede forte odore di acido cianidrico.

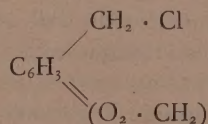
Analogo nel comportamento e nelle proprietà è il cloruro di veratril (1):



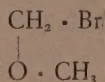
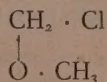
nel quale uno dei due metossili, invece che in orto, come nel composto precedente, è situato in posizione para rispetto al residuo aloogenato: questa condizione del resto si verifica in tutti i prodotti naturali o che derivano da prodotti naturali.

Anche in questo caso, a differenza del cloruro di benzile, tanto il cloruro come anche il bromuro vengono decomposti a freddo dall'acqua oppure dall'alcool ed in soluzione eterea, per azione del magnesio non forniscono i corrispondenti composti organomagnesiaci.

L'identico contegno si riscontra nel bromuro di piperonile (2):



nel quale il gruppo biossimetilenico occupa la medesima posizione dei due metili nel composto precedente. Anche questa sostanza, in soluzione eterea, non reagisce col magnesio nemmeno dopo 24 ore di ebollizione. È quindi prevedibile che si comportino in modo indifferente rispetto al magnesio anche i due derivati aloogenati:

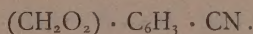
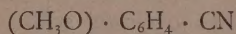


(1) DECKER e PSCHORR, « Berichte », 37 (1904), 3396.

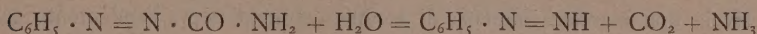
(2) KARRER, « Helvetica Acta », 6 (1923), 915.

La stessa influenza degli alcossili, situati in posizione para nell'anello aromatico, venne riscontrata nelle

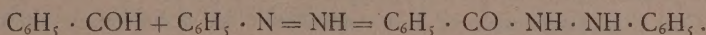
Reazioni di alcuni nitrili. È noto che i nitrili alcoolici ed il benzoni-trile reagiscono senza difficoltà col reattivo organomagnesiaco, tanto che sopra questa reazione sono fondati numerosi processi sintetici, soprattutto di derivati chetonici; invece, a parità di condizioni, la reazione non si compie col nitrile anisico e col nitrile piperonilico, entrambi eterificati in posizione para:



La reazione di alcune aldeidi. Ancora parecchi anni or sono in ho osservato che la fenilazocarbonammide di O. Widman, in soluzione alcalina, reagisce con tutta facilità sopra la benzaldeide per dare la benzoilfenilidrazide. Il processo è senza dubbio preceduto da formazione di fenildiimmide:

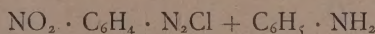


la quale successivamente si somma all'aldeide presente:

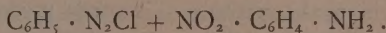


Con l'aldeide piperonilica invece, a parità di condizioni, finora non abbiamo ottenuto che prodotti resinosi. Anche le

Reazioni di alcuni sali di diazonio sono ostacolate ovvero favorite dalla presenza di alcuni sostituenti in posizione para; così nel mentre il cloruro di p- nitrofenildiazonio si copula con tutta facilità con l'anilina:

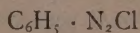


la reazione non si compie affatto fra cloruro di fenildiazonio e la p- nitro-anilina⁽¹⁾:



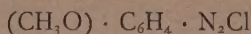
Come si vedrà in esempi successivi, sembra che in questa ed in altre reazioni sia precisamente il residuo nitrico situato in posizione para quello che le ostacola ovvero le ritarda.

Del pari è notevole il fatto che nel mentre i sali di fenildiazonio, p. es.:

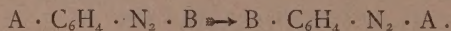


(1) NÖLTING e BINDER, «Berichte», 20 (1887), 3013.

ed analoghi vengono facilmente decomposti, la soluzione acquosa dei cloruri (orto e para):

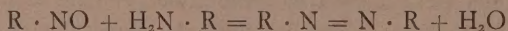


può venire riscaldata all'ebollizione senza subire alterazione di sorta. Anche questo fatto dimostra che molto probabilmente i due sostituenti in para ovvero in orto devono in qualche modo essere impegnati fra di loro, come del resto lo prova anche l'interessante trasposizione scoperta da Hantzsch, nella quale A e B rappresentano residui acidi:



Anche nella

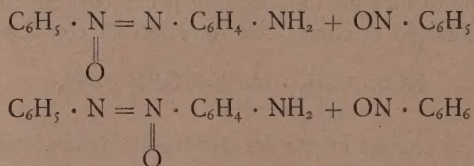
Formazione di alcuni azocomposti, per mezzo dei nitrosoderivati ed ammine aromatiche:



si rivela una marcata influenza di alcuni sostituenti sopra l'andamento della reazione. Questa, nella maggior parte dei casi, procede rapida ed è accompagnata da sviluppo di calore; ma anche in questo caso il gruppo nitrico, situato in para rispetto all'amminogruppo, ritarda il processo di condensazione.

Così il nitrosobenzolo ed il p- nitrosotoluolo si condensano in modo assai lento con la paranitroanilina ed anche il rendimento è sempre scarso perchè la lunga durata della reazione permette che una parte dei nitrosoderivati subisca decomposizioni di altro ordine.

Nello stesso modo, delle due reazioni:



la prima si compie in modo rapido e la seconda procede assai lenta, molto probabilmente perchè il residuo nitrico rassomiglia all'aggruppamento:



nella seconda ammina. Anche

La formazione di alcuni nitroni per condensazione delle aldeidi (che in molte reazioni si comportano come i nitrosoderivati) con le idrossilammine aromatiche (che in questo caso reagiscono come l'ossido dell'ammina) è una

Questo grandioso lavoro è in rapporto cogli importantissimi giacimenti di ottimo minerale di ferro (Magnetite) di Cogne, già conosciuti dai Romani, escavati saltuariamente nel Medioevo e poi intensamente coltivati dalla Società Ansaldo, ma che per maggiore e più economico incremento di sfruttamento richiedevano mezzi di trasporto più facili che non quelli attraverso la lunga (27 kilom.), difficile (anche per le frequenti valanghe) e costosissima via carreggiabile, ora carrozzabile della incassata Valle di Cogne sino ad Aymaville e poi di qui sino ad Aosta.

Vennero a tale scopo studiati vari progetti, così: nel 1902 una teleferica diretta tra la miniera di Liconi (2500 m.) e Aosta (580 m.) attraverso il Colle di Chazseche (2920 m.); nel 1904 una ferrovia elettrica a cremagliera da Cogne ad Aosta lungo la Valle della Grand' Eyva; nel 1916 una ferrovia mista ad aderenza e cremagliera, con varie gallerie (anche per evitare le più frequenti valanghe) lungo detta Valle.

Fu persino progettata una conduttura acqua, tubata, a forte pendenza lungo la Val d'Eyva per convogliare in sospensione il minerale finamente macinato.

Dal 1909 al 1914 si studiarono alcuni tracciati di teleferiche lungo la Valle della Grand' Eyva, che però, in causa della loro lunghezza non raggiungevano uno dei principali vantaggi di tali sistemi, la brevità di percorso fra le due stazioni: di partenza (Cogne) e di arrivo (Aosta).

Nel 1916 si cominciò a studiare di attraversare parzialmente in sotterraneo la catena montuosa dividente Cogne da Aosta; sia dapprima con teleferica e breve galleria di 2 kilom. (alla quota di 2400 m. s. l. m.) sotto Chaz-Seche; sia infine con ferrovia ma con galleria assai più bassa (a quota poco inferiore a 1550 m., quindi molto più lunga (oltre 6 kilom.), dopo il cui sbocco settentrionale (nell'alto della Valletta Gressan) si inizia una teleferica che porta il minerale sino ai forni di Aosta (575 s. l. m.). È il progetto effettuato.

I lavori si iniziarono nell'agosto 1916, ma subirono saltuariamente lunghe interruzioni e forti ritardi, specialmente per mancanza di mano d'opera, di materiali e di esplosivi, in causa del periodo bellico, nonchè per forti fuoruscite acquee presso l'imbocco Nord; dopo il 1919 il lavoro procedette più regolare e rapido (con avanzamento complessivo di circa 8 m. al giorno); il 17 sett. 1922 si abbattè il diaframma divisorio fra le avanzate dei due opposti imbocchi, continuandosi poi nella sistemazione della Galleria in modo da poterla inaugurare ufficialmente il 18 ottobre 1922 con completa traversata in carrelli da sopra Epinel (imbocco S.) a Eaux Froides (imb. N.),

*
**

Dal punto di vista geologico generale la regione della Galleria in questione presenta una specie di nucleo paleozoico gneissico-dioritico (che si estende dalla Val d'Eyva alla Val Savaranche attraverso gli alti e dirupati

gruppi di Punta Rou - Gran Nomenon - M. Ruje) disposto ad anticlinale rovesciata a Sud, avviluppato da una formazione permo-carbonifera (pure in anticlinale rovesciata) essenzialmente micaschistosa con passaggi a gneiss psammitici, prasinitici, cloritici, ecc. con intercalazioni grafitose. Attorno a tutto ciò sviluppa una potentissima formazione di calceschisti, con intercalazioni calcareo-dolomitiche prevalenti verso la base, ed inglobanti zone e lenti, anche assai estese e potenti, di svariate pietre verdi (cioè serpentine, prasiniti, anfiboliti ecc.); questa grande formazione calceschistosa-ofitifera sviluppa estesissimamente ed abbastanza regolarmente verso Nord nella Valle d'Aosta, mentre a Sud è presa in sinclinale, coricata a Sud, (tra l'anticlinale sovraccennata gneissico-dioritica e la grandiosa cupola anticlinale del Massiccio del Gran Paradiso) costituendo l'aspro gruppo della Grivola. Tale interessante tettonica è segnata nella sezione accompagnante la mia nota « Come sorse la Grivola » (Torino, 1923).

Premessi questi dati generali, possiamo passare ora all'esame geologico speciale della Galleria del Drink, e qui mi è gradito obbligo di ringraziare vivamente l'egregio Prof. Ing. S. Gilardi, che fu uno dei principali artefici di tale opera potendone così raccogliere e coordinare i dati geologici e tettonici (utilizzati in questa nota), fornendomi poi anche una copiosa serie di campioni litologici che ora fanno parte (N. d'Inv. 38-344) del Museo Geologico del Politecnico di Torino, vicino a quelli delle più importanti Gallerie transalpine; ed anche come Direttore di tale Museo desidero esprimere pubblicamente al Prof. Gilardi tutta la dovuta e profonda riconoscenza per detto prezioso dono.

Notisi che la formazione più antica, gneissico-dioritica, tanto estesa nella media Val di Cogne, non appare nella Galleria in esame trovandosi assai più profonda, nonchè sviluppata un po' più ad Ovest.

Nei dintorni di Epinel presso l'imbocco Sud della Galleria, sulla destra della Valle di Cogne o di Grand Eyva, si trovano sparsi depositi morenici misti al materiale delle conoidi alluvionali fluitate dai torrenti sboccanti dai ripidi valloni sovrastanti; ma subito la Galleria entra nella roccia gneissico-micaschistosa disposta in strati dolcemente ondulati con prevalenza di leggera pendenza verso il N.N.E. all'incirca, ciò che si prosegue abbastanza regolarmente, salvo qualche disturbo locale, per oltre due chilometri.

Talora la mica viene sostituita, almeno in parte, da clorite o da anfibolo, ciò che rappresenta un interessante passaggio a gneiss prasinitici; qua e là la roccia presenta lenti di quarzo intercalate fra lo schisto gneissico, più di rado in forma di pseudofiloni.

Tra il Km. 2° e poco oltre il 3°, la roccia gneissico-micacea si presenta invece disposta in dolce anticlinale, disturbata però da qualche arricciatura e da fratture oblique o subverticali; inoltre tra la formazione micaschistosa appaiono qua e là intercalazioni grafitose, foggiate quasi ad estese

lenti. Detta anticlinale va chiudendosi verso il 3° chilom. per modo che ritornasi poi alla inclinazione normale, verso il N.N.E. all'incirca, ma alquanto più accentuata di prima.

Nella parte alta di questa serie gneissico-psammitica essa diventa spesso più micaschistosa, con arricchimento del materiale quarzoso.

Poco oltre il 3° chilom., dopo un certo arricchimento o maggior frequenza in materiale grafítico od anche antracítico-grafitoso, allo gneiss filatíco o fillade gneissica succede una formazione quarzítico-micaschistosa, biancastra, inclinata di una trentina di gradi a N.N.E. È una formazione assai complessa che all'esterno, dove affiora sopra l'imbocco Sud della Galleria, mostrasi essenzialmente quarzitica, mentre che nella galleria mostrasi connessa e passante in basso a gneiss molto quarzosi, ed a quarziti micacee, più in alto a quarziti più micacee ed a schisti sericitici a mica bianca, talco, con molto materiale quarzoso, ecc.

A questa potente zona quarzitica si sovrappongono regolarmente dapprima alcuni banchi di calcari più o meno dolomitici, spesso un po' micacei; poi calceschisti un po' grafitosi.

Infine poco oltre il 3° Km. e $\frac{1}{2}$ si sviluppa potentissima sempre colla prevalente inclinazione di 30°-40° verso il Nord circa, (salvo ondulazioni od arricciature e fratture locali) la grande formazione calceschistosa più o meno micacea; questa presenta, come di solito, notevoli inclusioni lentiformi di pietre verdi, (come tra la progressiva 4100 e 4200 e presso l'imbocco Nord), rappresentate specialmente da serpentina e meno abbondantemente da prasiniti e da anfiboliti spesso un po' epidotiche. Inoltre fra i calceschisti appaiono pure qua e là, specialmente tra le progressive 4250 e 4600, ripetute intercalazioni di calcari più o meno dolomitici ed anche qualcuna quarzoso-sericitica, nonchè ancora spalmature grafitose o (specialmente verso il basso) schisti carboniosi o lenti antracítico-grafitose.

Nella serie calceschistosa appaiono pure non di rado lenti o pseudo filoni quarzíticos disposti in vario senso.

Naturalmente nella sezione presentata l'andamento e lo sviluppo sia delle zone grafitiche, sia di certe intercalazioni quarzítico-sericitiche, sia dei banchi calcareo-dolomitici, sia delle lenti di pietre verdi, risultano incerti ed approssimativi, data appunto la natura lentiforme di tali terreni.

Anche l'andamento tettonico riesce un po' schematico, tanto più per la grande serie calceschistosa che sappiamo presentare invece spesso corrugamenti in piccola e grande scala, come per esempio verificasi nella grande sinclinale rovesciata della Grivola.

Riguardo ai dati termici osservati nello scavo della Galleria del Drink essi sono complessivamente riassunti nel profilo unito alla sezione, per quanto siansi incontrati localmente temperature anche superiori ai 25°; la elevazione termica relativamente piccola che presentò tale Galleria è specialmente in rapporto con frequenti filtrazioni acquee che furono specialmente

abbondanti negli ultimi due chilometri verso Nord, in relazione di banchi calcarei, come di solito.

Oltre alle acque filtranti semplici, ve ne furono pure alcune un po' ferruginose; si verificarono locali sviluppi di anidride carbonica, ecc.

Le pressioni esercitate dagli schisti con accompagnamento di spostamenti, ecc., obbligarono talora ad armamenti speciali, all'uso dell'arco rovescio, ecc.

Biologia. — *Gli exconiuganti, derivati dalla 1ª Coniugazione accessoria fra Gameti impuri in "Cryptochilum Echini", producono Gametogeni puri e Gameti puri, che rinnovano il ciclo principale.*
Nota del Corrisp. ACHILLE RUSSO⁽¹⁾.

Come esposi in una Nota precedente⁽²⁾, dopo che, con lo scambio dei nuclei migratori, ha termine la 1ª Coniugazione accessoria, i Gameti si separano e ciascuno forma un *exconiugante*, che è sempre di più piccole dimensioni rispetto al Gamete, da cui ebbe origine. In entrambi il *nucleo stazionario* si atrofizza, quando ancora i due Gameti sono uniti, come si vede nella figura 2, che è inserita nella Nota avanti citata, mentre solo il *nucleo migratore* procede nel suo ulteriore sviluppo, dando luogo a due successive divisioni.

Nell'*exconiugante*, derivato dal Gamete impuro B¹, il nucleo migrato, che apparteneva al Gamete A¹, conserva per qualche tempo la sua posizione nella regione anteriore, nel punto stesso, in cui esso è penetrato; però, ben presto si sposta verso il macronucleo, assumendo quasi una posizione centrale nel corpo dell'*exconiugante*. Tale nucleo, già quando ancora è nella regione anteriore, poco dopo che è avvenuta la sua migrazione, incomincia a dividersi, mediante un processo mitotico, di cui furono seguiti vari stadii. Difatti, mentre in un primo momento assume la forma di fuso con cromatina sparsa sui fili acromatici e poi di piastra equatoriale, in un secondo tempo la sostanza cromatica si porta ai due poli. A questo stadio, il nucleo si sposta verso il centro cellulare, dove assume forma sempre più allungata. La cromatina, nel frattempo, si addensa ai due estremi della figura mitotica, formando due globi, che restano uniti fra loro da un filamento, che si colora intensamente in nero soltanto con l'*Ematossilina ferrica*.

Nella fase finale del processo divisorio, i due nuclei si rendono indipendenti, mentre il filamento viene riassorbito. Ciascuno di questi due nuclei

(1) Presentata nella seduta del 21 marzo 1926.

(2) A. Russo, *La 1ª Coniugazione accessoria tra Gameti impuri in "Cryptochilum Echini" Maupas*. « Rendic. R. Acc. Nazionale dei Lincei », vol. II, ser. 6ª, 2º sem., Roma, 1925.

compie, con lo stesso processo sopra descritto, una nuova divisione, per cui ognuno forma due altri nuclei, che restano anche uniti da un lungo *filamento siderofilo*, assottigliato ai due estremi ed ingrossato nel mezzo. Ben presto però i quattro nuclei si rendono indipendenti, ed i due filamenti si osservano isolati, dentro il protoplasma, prima di essere riassorbiti.

I quattro nuclei, formati per due successive divisioni del *nucleo migrato*, tendono ad avvicinarsi fra loro, assumendo varie posizioni, ma, in



ogni caso, si collocano sempre vicino al vecchio macronucleo dell'exconiu-gante, il quale subito dopo si atrofizza.

I quattro nuclei suddetti, da principio, sono uguali tra loro, di piccole dimensioni ed intensamente colorati, sia che fu adoperato, come mezzo co-

lorante, l'*Ematossilina ferrica*, sia la *Saffranina Pfitzner*, sia altri coloranti nucleari. In fase successiva, tre di essi però aumentano di volume e presentano dei vacuoli nella loro massa compatta. La vacuolizzazione, in un primo momento, rende la massa nucleare molto chiara, ma in seguito tali nuclei si mostrano anche uniformemente ed intensamente colorati. Per il volume maggiore da essi assunto, rispetto al quarto nucleo, che è rimasto di piccole dimensioni e che è destinato a formare il micronucleo, essi costituiscono i tre macronuclei dell'apparato nucleare del nuovo individuo, che così si è costituito.

I tre macronuclei di questo nuovo individuo hanno lo stesso volume e la stessa colorazione e non presentano una particolare ubicazione rispetto al micronucleo, a differenza dei tre macronuclei e del micronucleo degli *Individui misti*, che, per la loro differente origine, come fu esposto in una Nota precedente ⁽¹⁾, hanno non solo grandezza e struttura differente, ma anche hanno una posizione ben determinata.

Il nuovo individuo, formatosi dall'exconiugante B¹, il cui apparato nucleare, composto di tre macronuclei e di un micronucleo, si è costituito per due successive divisioni del *nucleo migrato*, è un *Gametogene puro* ⁽²⁾, non solo perchè i nuclei hanno tutti la stessa origine, ma perchè da esso, per due nuove divisioni, si formeranno dei *Gameti puri*. Difatti, il micronucleo di detto Gametogene inizia per mitosi una nuova divisione, formando due nuclei globulari, che si situano ai due estremi dell'individuo, rimanendo uniti, per qualche tempo, da un lungo filamento siderofilo. Due dei tre macronuclei, nel frattempo, si portano in avanti ed uno di essi indietro, vicino i micronuclei; cosicchè, quando il protoplasma del *Gametogene* si divide trasversalmente, nella regione mediana, si costituiscono due nuovi individui, dei quali uno, l'anteriore, ha due macronuclei, l'altro, il

(1) A. Russo, *GF Individui misti formati dagli exconiuganti, dopo la Coniugazione vera in "Cryptochilum Echini" Maupas, e l'origine dei Gametogeni*, « Rendic. R. Acc. Nazionale dei Lincei », vol. XXXIII, ser. 5^a, 1° sem., Roma, 1924.

(2) Una prova per ritenere che tale individuo sia un Gametogene puro, che produce Gameti puri, si potrebbe desumere dal fatto che talora, ma molto di rado, la *Coniugazione vera* si compie fra Gameti, di cui uno ha due macronuclei, e che questo non potrebbe essere fornito dal Gametogene puro, che deriva dall' *Individuo misto*, che ha, come si è detto, un solo macronucleo. Fu osservato però, che in alcuni Gametogeni il macronucleo, dopo essersi diviso una prima volta, si divide una seconda volta, dandò così origine a Gameti con due macro ed un micronucleo. Tali individui sono, a mio giudizio, dei Gameti impuri, sia perchè furono spesso osservati in uno dei coniuganti delle coppie, che compiono la 1^a coniugazione accessoria, sia perchè la seconda divisione del macronucleo fu osservata non solo nei Gametogeni impuri, che producono Gameti impuri con micronucleo globuliforme, ma anche in quelli, che danno origine a Gameti impuri con il micronucleo allungato, piriforme o spiniforme, il quale è caratteristico di tale categoria di Gameti. La seconda divisione del macronucleo fu considerata quale una anomalia, propria dei Gameti impuri (Vedi nota in « Rendiconti R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. I, serie 6^a, 1° sem., Roma, 1925).

posteriore, ne ha uno solo. Ciascuno di tali nuovi individui si divide alla sua volta, per cui, in ultimo, si costituiscono quattro individui gametici, aventi ognuno un macro ed un micronucleo di forma globulare. In ciascun Gamete il micronucleo è $1/16$ del nucleo migrato originario, il macronucleo invece è $1/4$ nei due individui, che si sono formati dalla metà anteriore del Gametogene puro, mentre è $1/8$ nei due, che presero origine dalla metà posteriore.

Per tali caratteri i Gameti puri, costituitisi dal Gametogene puro, originatosi dall'exconiugante B^1 , dopo la 1ª Coniugazione accessoria, sia per la forma del micronucleo, sia per la quantità della sostanza nucleare, sono perfettamente simili a quelli che, come si è detto in altre Note, ebbero origine dal Gametogene puro, formatosi dopo la Coniugazione principale (1).

Nell'exconiugante, derivato dal Gamete impuro A^1 , il nucleo migrato, che apparteneva al Gamete impuro B^1 , conserva anche per qualche tempo la sua posizione nel punto stesso, in cui è avvenuta la sua penetrazione, ed ivi comincia a dividersi con un processo diverso, cioè per amitosi e senza filamento siderofilo. Difatti, il nucleo migrato si allunga e si strozza nel mezzo, dando origine a due nuovi nuclei, ciascuno dei quali, reso indipendente, si divide con lo stesso processo. I quattro nuclei così costituiti, con le stesse modalità avanti descritte, formeranno l'apparato nucleare del nuovo individuo, composto da un micronucleo e di tre macronuclei, i quali ultimi hanno lo stesso volume e la stessa colorazione. Tale individuo, difficile a distinguere, in questo stadio, da quello precedentemente descritto, è un *Gametogene puro*, perchè da esso hanno origine *Gameti puri*, atti a compiere la copula vera o principale.

Nelle divisioni, che compie il *Gametogene puro*, derivato dall'exconiugante A^1 , il micronucleo si divide anche per amitosi. Nella prima divisione si formano due individui, di cui l'anteriore ha due macronuclei, il posteriore uno; nella seconda divisione, che questi compiono, ne risultano quattro individui gametici, aventi ciascuno un macronucleo ed un micronucleo a forma di virgola con sostanza nucleare ridotta ad $1/32$, similmente a quanto fu osservato nei *Gameti puri* con micronucleo virgoliforme, che si formano dopo la Coniugazione principale.

(1) I nuclei migratori, che si formano nell'ultima fase della 1ª Coniugazione accessoria, sarebbero rispettivamente $1/128$ ed $1/256$, se a ciascuno di essi si volesse dare un valore reale, risultante da tutte le divisioni, alle quali vanno soggetti i micronuclei dei due gameti, che iniziano la coniugazione principale. Per effetto di tali successive divisioni la sostanza nucleare in ultimo dovrebbe essere molto ridotta, ma in fatto ciò non avviene, perchè i nuclei che si ricostituiscono, dopo ogni scissione, aumentano di volume ed assumono le ordinarie proporzioni. Per tal fatto e per semplicità quelle due frazioni furono ridotte ad 1 ed $1/2$.

Il nucleo migrato dell'exconiugante B^1 , essendo uguale ad 1, i micronuclei dei Gameti, che da esso si formano, dopo 4 divisioni, sono uguali ad $1/16$. Il nucleo migrato dell'exconiugante A^1 , essendo uguale ad $1/2$, dopo 4 divisioni, forma i micronuclei dei Gameti uguali ad $1/32$ (vedi schema).

Anche, in tale serie di Gameti, il macronucleo dei due individui, formati dalla regione anteriore del Gametogene, è diverso da quello dei due individui, formati dalla regione posteriore, essendo quello 1/8, questo 1/16. L'ineguaglianza dei macronuclei dei Gameti puri, provenienti dal Gametogene puro, costituitosi dopo la Coniugazione accessoria, rende meno perfetto il processo di gametogenesi di quello che fu osservato nei Gametogeni puri, derivati dall'*Individuo misto*, formatosi dopo la Coniugazione principale. I micronuclei dei due Gameti però, in entrambi i casi, sono perfettamente uguali per la forma e per la quantità di sostanza nucleare, essendo l'uno la metà dell'altro.

Nella categoria di Gameti, considerati in questa Nota, essi quindi corrispondono anche alla formula $N = \frac{n}{2}^{(1)}$.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sur la vitesse de propagation de l'onde solitaire.* Nota di ALESSANDRO WEINSTEIN, presentata ⁽²⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

L'onde solitaire, observée pour la première fois par Scott Russell ⁽³⁾, consiste d'une seule élévation qui se propage sans changement de forme avec une vitesse constante c dans un canal à profondeur finie h , le mouvement réel des particules (de vitesse petite par rapport à c) ayant lieu dans des plans verticaux.

La vitesse c est sensiblement liée à l'élévation maximum a au dessus du niveau moyen par la relation remarquable

$$(1) \quad c^2 = g(h + a).$$

Rayleigh et Boussinesq ont retrouvé ce résultat expérimental par un calcul d'approximation en se servant d'un artifice ingénieux.

(1) Il prof. B. Grassi, che seguiva con vivo interesse queste ricerche e che spesso ebbe ad incoraggiarle, riteneva che il doppio ciclo di *Cryptochilum* da me scoperto, ed il ritorno al ciclo principale, a mezzo di un ciclo accessorio, potesse gettare molta luce nel ciclo biologico di altri Protozoi. Con quell'ardore per la ricerca scientifica e per il progresso degli studii biologici, in lui tanto caratteristico, riteneva meritevole di particolare indagine la mia ipotesi che le *recidive malariche* potessero eventualmente avere una spiegazione dal ripetersi di un ciclo consimile nel sangue.

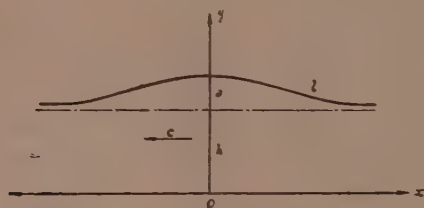
(2) Nella seduta del 21 marzo 1926.

(3) Voir par ex. LAMB, *Hydrodynamics* (Cambridge, 1924), § 252.

Nous nous proposons d'étudier le problème de l'onde solitaire par la méthode de M. Levi-Civita⁽¹⁾ et nous établirons dans cette Note une relation (voir l'équation (11)) qui est une approximation d'un ordre plus élevé que (1), notre intention étant d'aborder ensuite la solution rigoureuse de la question.

Position du problème. — Admettons, en nous plaçant dans un plan vertical parallèle aux parois du canal, que la ligne l qui limite supérieurement le liquide ait une crête unique et tende asymptotiquement à l'infini vers la droite horizontale d'hauteur h au dessus du fond (voir la figure).

La ligne l se déplace avec une vitesse constante horizontale c par rapport à un observateur fixe, le mouvement réel étant irrotationnel. Le mou-



vement devient permanent par rapport à un système d'axes Oxy invariablement liés à l , Oy étant dirigé vers le haut et passant par la crête, tandis que Ox , coïncidant avec le fond du canal, a un sens opposé à la direction de c .

On aura, d'après la nature même du mouvement ondulatoire, pour les composantes u, v de la vitesse relative les relations suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u = c, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} v = 0,$$

$(u - c)^2 + v^2$ restant toujours voisin de 0 et v s'annulant rigoureusement pour $y = 0$.

Sur l nous avons l'équation dynamique fondamentale

$$(2) \quad \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + g y = \frac{1}{2}c^2 + g h$$

où la constante au second membre a été déterminée par les conditions à l'infini.

Désignons par φ^* et ψ^* le potentiel et la fonction du courant. On peut alors établir une représentation conforme faisant correspondre biunivoquement au champ du mouvement la bande indéfinie S^* comprise entre les droites $\psi^* = 0$ et $\psi^* = c h$ du plan $f^* = \varphi^* + i \psi^*$ et cela de manière que les axes se correspondent entre eux.

(1) *Détermination rigoureuse des ondes permanentes*, « Mathematische Annalen » 62, 1925).

En posant $f^* = c h f = c h (\varphi + i \psi)$, (où φ et ψ sont des nombres purs) on obtient, au lieu de S^* , la bande S_τ du plan f limitée par les droites $\psi = 0$ et $\psi = 1$.

D'après le procédé de M. Levi-Civita nous allons introduire f comme variable indépendante, en prenant pour fonction inconnue la grandeur $\omega = \vartheta + i \tau$, définie par l'équation

$$w = c e^{-i\omega} = c e^\tau e^{-i\vartheta} \quad (\tau, \vartheta \text{ réels}),$$

où $w = \frac{df^*}{d\lambda}$ designe la vitesse complexe $u - i v$.

En reprenant le raisonnement de M. Levi-Civita, tenant toutefois compte de la nature qualitative de notre phénomène, nous arrivons à poser pour l'onde solitaire le *problème fondamental* suivant :

Déterminer les fonctions $\omega(f)$ régulières dans la bande S_τ et nulles à l'infini, qui satisfont aux conditions aux limites suivantes :

$$(3) \quad \vartheta = 0 \quad , \quad \text{pour } \psi = 0 ,$$

$$(4) \quad \frac{d\tau}{d\varphi} + p e^{-3\tau} \sin \vartheta = 0 \quad , \quad \text{pour } \psi = 1 ,$$

p étant une constante a priori indéterminée qui est liée à c et b par la relation

$$p = \frac{g h}{c^2} .$$

Pour obtenir une solution approchée de (4) nous allons y remplacer $\frac{d\tau}{d\varphi}$ par les trois premiers termes d'un développement semiconvergent que M. Levi-Civita a obtenu ⁽¹⁾ en analysant l'artifice employé, par Rayleigh. Ce développement peut être déduit dans notre cas de la manière suivante :

$\omega = \vartheta + i \tau$ étant, pour $\psi = 0$, égale à une quantité purement imaginaire $i \tau_0$, on a (en faisant usage du symbolisme employé par M. Levi-Civita) par la série de Taylor

$$\omega(\varphi, i) = i e^{i D} \tau_0$$

(où le symbole D signifie l'opération $\frac{d}{d\varphi}$).

On en tire

$$\vartheta(\varphi, i) = -\sin D \tau_0 \quad , \quad \tau(\varphi, i) = \cos D \tau_0 ,$$

(1) Sulla espressione del resto in una operazione funzionale usata da Lord Rayleigh, « Rend. Acc. Linc. », 20, I (1911), p. 605-614.

d'où il vient en éliminant τ_0

$$-\frac{d\tau}{d\varphi} = -D\tau = D \cotg D\vartheta = \vartheta - \frac{1}{3} D^2 \vartheta - \frac{1}{45} D^4 \vartheta + R_6,$$

le module de R_6 étant inférieur à la limite supérieure de $\frac{2}{945} |D^6 \vartheta|$.

En négligeant R_6 nous allons substituer cette valeur de $-\frac{d\tau}{d\varphi}$ dans l'équation (4), ce qui nous donnera l'équation approchée

$$(5) \quad p e^{-\tau} \sin \vartheta = \vartheta - \frac{1}{3} D^2 \vartheta - \frac{1}{45} D^4 \vartheta, \quad \text{pour } \psi = 1.$$

On obtiendrait (comme on va le voir) l'approximation de Rayleigh en négligeant encore le terme $-\frac{1}{45} D^4 \vartheta$.

Pour pouvoir estimer dans tous les cas l'erreur commise, nous considérons (ce qui est d'ailleurs suggéré par la nature du problème) de considérer comme petite quantité du premier ordre la valeur maximum v de $|\tau|$ (égal à la valeur absolue du $\log \left| \frac{w}{c} \right|$) sur la ligne l (et par conséquent aussi dans tout le champ du mouvement).

Il est évident d'après l'équation (2), ou de son équivalente

$$(6) \quad \frac{1}{2} l^2 \tau + p \frac{y-b}{h} = \frac{1}{2},$$

que $|\tau|$ atteint cette valeur v seulement à la crête (unique), et qu'en ce point on aura $\tau = -v$, $\vartheta = 0$. L'hypothèse faite sur l'allure de la ligne libre permet en outre d'affirmer, d'après (6), que τ varie en croissant de $-v$ jusqu'à 0 lorsque φ varie de 0 à ∞ .

On peut donc introduire τ comme variable indépendante dans (5) et remplacer chaque D par $\tau' \frac{d}{d\tau}$, $\left(\tau' = \frac{d\tau}{d\varphi} \right)$.

Nous allons d'abord chercher à retrouver (en négligeant le terme $-\frac{1}{45} D^4 \vartheta$) le résultat de Rayleigh et nous obtiendrons en même temps l'ordre de grandeur de ϑ , ce qui facilitera les calculs sur l'équation (5) complète.

En introduisant τ au lieu de φ on obtient par intégration de l'équation (5) réduite:

$$(7) \quad \frac{p}{6} \vartheta^2 = \frac{\tau^2}{2p} [\tau + (1-p)]$$

ce qui nous donne (ϑ devant s'annuler à la crête, c'est à dire pour $\tau = -v$) la relation

$$(8) \quad v = 1 - p.$$

D'autre part l'équation (6) donne à la crête

$$(9) \quad p \frac{a}{b} = \frac{1}{2} (1 - e^{-2v}) = v - v^2 + \dots$$

En combinant (8) et (9) on retrouve la relation de Rayleigh :

$$\frac{a}{b} = \frac{c^2}{g b} - 1 + \overline{[2]}$$

où le symbole $\overline{[2]}$ indique que l'erreur commise est, par rapport à v , de l'ordre 2 au plus. L'équation (7) démontre en même temps que $(1 - p \text{ étant égal à } v) \vartheta^2$ est de l'ordre 3 et que cette quantité a une racine simple pour $\tau = -v$ et une autre double pour $\tau = 0$. Cela signifie d'ailleurs géométriquement que la courbure de l est 0 seulement à l'infini et pas à la crête.

Tenant compte de l'ordre de ϑ et négligeant l'ordre 5 on peut aisément intégrer l'équation complète (5) deux fois, ce qui donne la relation suivante

$$\frac{p^3}{90} \vartheta^2 \frac{d^2 \vartheta^2}{d\tau^2} - \frac{p^3}{360} \left(\frac{d \vartheta^2}{d\tau} \right)^2 + \frac{p}{6} \vartheta^2 = \frac{\tau^2}{2p} [\tau + (1 - p)] + \frac{1}{p} \left[(1 - p) \tau^3 + \frac{3}{2} \tau^4 \right] + \overline{[5]}.$$

On en déduit en se servant de (7)

$$\frac{p}{6} \vartheta^2 = \frac{\tau^2}{p} \left[\frac{9}{8} \tau^2 + \frac{1 + (1 - p)}{2} \tau + \frac{5(1 - p) - (1 - p)^2}{10} \right] + \overline{[5]}.$$

La condition que la parenthèse s'annule pour $\tau = -v$ donne la relation

$$(10) \quad 1 - p = v - \frac{21}{20} v^2 + \overline{[3]}.$$

qui est plus précise que (8). En combinant maintenant (10) et (9) on obtient la relation cherchée

$$(11) \quad c^2 = g b \left(1 + \frac{a}{b} - \frac{21}{20} \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right).$$

Cette équation nous montre que l'expression (1) de la vitesse de propagation (adoptée par Scott Russell et justifiée théoriquement par Rayleigh

et Boussinesq) est une approximation par excès, d'ailleurs assez bonne, le terme correctif ayant pour coefficient $\frac{21}{20}$ et ne pouvant donc dépasser dans les cas ordinaires 4 % (en admettant $\frac{a}{b} \equiv \frac{1}{5}$) du précédent.

Remarque. — Dans le cas des ondes périodiques la première approximation est fournie par la résolution d'un *problème linéaire*. On pourrait être tenté d'avoir recours à une approximation analogue aussi dans notre cas. On n'aurait qu'à remplacer la condition (4) pour la fonction cherchée ω par l'équation

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = -p\psi, \quad \text{pour } \psi = 1.$$

Mais ce problème n'admet pas de solution (possédant les propriétés voulues) différente de zéro. J'ai pu le démontrer rigoureusement, en supposant $p \leq 1$ (hypothèse qui semble être justifiée par l'approximation de Rayleigh); mais je pense qu'il en est de même pour $p > 1$, et j'espère de revenir prochainement sur ce point, pour justifier la nécessité d'aborder dès le début le problème de l'onde solitaire par une approximation non linéaire. C'est justement ce qu'ont fait Rayleigh et Boussinesq, et nous également, quoique par une autre méthode et en poussant davantage l'approximation.

Meccanica. — *Sul teorema di Dirichlet.* Nota di GIORGIO VRANCEANU, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Si sa come il teorema di Dirichlet coi complementi del Liapounoff⁽²⁾, permette di decidere sulla stabilità di una posizione di equilibrio, quando il potenziale è massimo per quella posizione, facendo uso solo dell'integrale delle forze vive.

Lo studio della stabilità delle soluzioni stazionarie dei sistemi olonomi cominciato da Routh e perfezionato dal prof. T. Levi-Civita⁽³⁾, è stato ricondotto allo stesso criterio di Dirichlet, nel senso che, se il potenziale dipende anche da un certo numero di parametri, basta (per la stabilità) che il massimo del potenziale abbia luogo per certi valori costanti dei pa-

(1) Nella seduta del 21 marzo 1926.

(2) *Sur l'instabilité de l'équilibre dans certains cas où la fonction de forces n'est pas un maximum*, « Journal de Mathématiques », 1897, pp. 81-94.

(3) *Sulla determinazione di soluzioni particolari di un sistema canonico, e sui moti stazionari dei sistemi olonomi*, « Rendiconti dei Lincei », to. X, serie 5^a, 1907, pp. 3-9, 137-113.

rametri, che a meno di una trasformazione lineare si possono considerare nulli.

La stabilità delle soluzioni stazionarie di certi sistemi anolonomi, dei quali spero di occuparmi più tardi e di cui un esempio si ha nella mia Nota *Sulla stabilità del rotolamento di un disco*⁽¹⁾, si può (mediante applicazione di un teorema di analisi che risale al Weierstrass e a cui io ho dato forma conveniente a questo genere di questioni) ricondurre allo stesso criterio di Dirichlet.

Mi propongo appunto in questa Nota di dare una nuova dimostrazione del teorema di Dirichlet che vale anche per il caso in cui il potenziale dipende da un certo numero di parametri, servendomi per tale dimostrazione del teorema di Weierstrass e dei complementi aggiunti da me⁽²⁾.

Siccome nella dimostrazione faremo uso, solo dall'integrale delle forze vive, il risultato rimarrà acquisito, sia per sistemi olonomi⁽³⁾ che anolonomi, sotto le ipotesi che ora specificheremo.

Supponiamo che per un dato sistema materiale, l'esistenza di coordinate ignorabili o di un certo numero di integrali primi faccia assumere all'integrale delle forze vive la forma

$$(1) \quad T = U,$$

dove T è una forma quadratica definita positiva nelle q'_1, q'_2, \dots, q'_k , ed U una funzione di q_1, q_2, \dots, q_k a coefficienti dipendenti da un certo numero di parametri x_1, x_2, \dots, x_n , che indicheremo per semplicità con la sola lettera x .

L'esistenza dei parametri deriva tanto dai valori iniziali delle q e q' , quanto dalle costanti degli integrali ammessi dal problema dinamico.

Se per $x = 0$, il potenziale è massimo nelle q , la soluzione stazionaria o posizione di equilibrio

$$q_1 = q_2 = \dots q_k = 0,$$

è stabile quando le x variano in un certo campo abbastanza vicino all'origine.

Si deve osservare che siamo nel caso classico di Dirichlet, quando facciamo variare solo i parametri x che provengono dalle condizioni iniziali delle q e q' , e lasciamo zero tutti gli altri.

Per semplicità della dimostrazione, supponiamo che $k = 2$ e che il massimo del potenziale si riconosca sui termini del secondo grado nelle q .

(1) Questi « Rendiconti », vol. XXXIII, serie 5ª, 1924, pp. 383-388.

(2) Sul teorema di Weierstrass, questi « Rendiconti », vol. XXXIII, serie 5ª, 1924, pp. 270-274.

(3) Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Sullo spostamento dell'equilibrio*, « Atti del R. Istituto Veneto », to. LXXI, (serie VIII, to. 14), 1911-1912, pp. 241-249.

Vale a dire che ordinando secondo le potenze di q_1 e q_2 , U prende la forma

$$(2) \quad U = -[a_0(x) + a_1(x)q_1 + a_2(x)q_2 + a(x)q_1^2 + \\ + 2b(x)q_1q_2 + c(x)q_2^2 + \dots],$$

dove per $x = 0$ si ha

$$(3) \quad a_0(0) = 0, \quad a_1(0) = 0, \quad a_2(0) = 0, \quad a(0) = \alpha > 0, \\ c(0) = \gamma > 0, \quad b(0) = \beta, \quad \alpha\gamma - \beta^2 > 0.$$

Possiamo supporre che $\beta \neq 0$, altrimenti basterebbe premettere una trasformazione lineare fra le q .

Ciò posto, consideriamo la U come funzione della sola q_1 , e ordiniamo secondo le potenze di q_1 , scrivendo

$$(2') \quad U = -[\alpha q_1^2 - A_0(q_2|x) - A_1(q_2|x)q_1 - \\ - A_2(q_2|x)q_1^2 - A_3(q_2|x)q_1^3 - \dots].$$

In virtù delle (3) si ha per $q_2 = x = 0$

$$(3') \quad A_0(0|0) = 0, \quad A_1(0|0) = 0, \quad A_2(0|0) = 0.$$

Applicando il teorema di Weierstrass possiamo scrivere in un certo campo che comprende l'origine

$$(4) \quad U = -[\alpha q_1^2 - \lambda_1 q_1 - \lambda_2] \varphi,$$

dove φ è una funzione olomorfa delle q e delle x , uguale a 1 per $q_1 = q_2 = x = 0$, e λ_1, λ_2 sono funzioni olomorfe di q_2 e delle x , nulle per $q_2 = x = 0$, date dalle formole⁽¹⁾

$$(5) \quad \begin{cases} \lambda_1 = A_1(q_2|x) + A_2(q_2|x)\lambda_1 + A_3(q_2|x)\lambda_2 + \dots, \\ \lambda_2 = A_0(q_2|x) + A_2(q_2|x)\lambda_2 + A_3(q_2|x)\lambda_1\lambda_2 + A_4(q_2|x)\lambda_2^2 + \dots \end{cases}$$

i termini non scritti, sono rispettivamente almeno del secondo e del terzo ordine in λ_1 e λ_2 .

Immaginando di ricavare dalle (5) λ_1 e λ_2 in funzione di q_2 e delle x , ordinate secondo le potenze di q_2 , si può subito riconoscere, tenendo conto delle (3) e (3'), che per $x = 0$ si ha

$$(5') \quad \begin{cases} \lambda_1 = -2\beta q_2 + \dots, \\ \lambda_2 = -\gamma q_2^2 + \dots \end{cases}$$

(1) Cfr. *Sul teorema di Weierstrass*, nota già citata, p. 274.

Possiamo pertanto applicare anche qui il teorema di Weierstrass, scrivendo

$$(6) \quad \begin{cases} \lambda_1 = -(2\beta q_2 - \lambda) \varphi_1, \\ \lambda_2 = -(\gamma q_2^2 - \mu_1 q_2 - \mu_2) \varphi_2, \end{cases}$$

dove φ_1, φ_2 sono funzioni olomorfe di q_2 e delle x , uguale a 1 per $q_2 = x = 0$, e λ, μ_1, μ_2 sono funzioni olomorfe delle x , nulle per $x = 0$. Introducendo nella (4) i valori di λ_1 e λ_2 dati dalle (6), si ottiene

$$(7) \quad U = -[\alpha q_1^2 + 2\beta \varphi_1 q_1 q_2 + \gamma \varphi_2 q_2^2 - \lambda \varphi_1 q_1 - \mu_1 \varphi_2 q_2 - \mu_2 \varphi_2] \varphi.$$

Siccome le φ sono uguali a 1 per $q_1 = q_2 = x = 0$, si può sempre trovare un campo P

$$P[|x| \leq r, |q_1| \leq r_1, |q_2| \leq r_2]$$

nel quale siano olomorfe le funzioni $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \lambda, \mu_1, \mu_2$, e si abbia

$$\varphi > 0, \quad \varphi_2 > 0, \quad K = \alpha \lambda m - \beta^2 M^2 > 0$$

dove M e m indicano il massimo ed il minimo delle φ_1 e φ_2 .

Con questo il trinomio

$$\alpha q_1^2 + 2\beta \varphi_1 q_1 q_2 + \gamma \varphi_2 q_2^2$$

è sempre positivo. Consideriamo adesso una soluzione con valori iniziali $(q_1)_0, (q_2)_0, (q'_1)_0, (q'_2)_0$ interni al campo P.

Siccome T è sempre positivo si deve avere inizialmente anche $U \geq 0$, da cui risulta che la coppia $(q_1)_0$ e $(q_2)_0$ rappresenta un punto interno alla curva chiusa

$$\alpha q_1^2 + 2\beta \varphi_1 q_1 q_2 + \gamma \varphi_2 q_2^2 - \lambda \varphi_1 q_1 - \mu_1 \varphi_2 q_2 - \mu_2 \varphi_2 = 0.$$

Ma $\varphi > 0$ in P, perciò il punto (q_1, q_2) rimane sempre interno a questa curva, anzi addirittura al cerchio,

$$q_1^2 + q_2^2 - \frac{MR(\alpha + M\gamma)}{K} = 0,$$

dove

$$R = |\lambda| + |\mu_1| + |\mu_2|.$$

Questo cerchio si può rendere piccolo quanto si vuole, perchè R si annulla colle x , cosicchè si può affermare senz'altro che la soluzione stazionaria

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0,$$

è stabile.

Per vedere che la nostra dimostrazione, vale anche per un numero qualunque di variabili q , o, quando il massimo si riconosce sui termini di ordine superiore al secondo, basta pensare che il massimo richiede delle disuguaglianze fra diversi coefficienti, i quali quando si applica successivamente il teorema di Weierstrass, si moltiplicano per diverse funzioni φ .

Tenendo conto della proprietà di queste funzioni φ , risulta che quelle disuguaglianze possono essere soddisfatte anche quando le x variano in un certo campo abbastanza poco discosto dall'origine.

Questo porta con sé che tutte le soluzioni con valori iniziali interni a questo campo, rimangono sempre interne a superficie chiuse, prossime quanto si vuole all'origine.

Nel caso in cui $k = 1$ l'integrale delle forze vive prende la forma di Weierstrass (con in più i parametri x)

$$(8) \quad y'^2 = U(y|x),$$

e si può subito riconoscere, tenendo conto delle proprietà ben note di queste eq. (8), che la condizione sufficiente per la stabilità, che il potenziale sia massimo, è anche necessaria.

Idromeccanica. — *Una estensione delle formule del Blasius.*
Nota di ARNALDO MASOTTI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

1. Sono oggetto di questa Comunicazione alcune formule atte alla determinazione delle azioni dinamiche esercitate da un liquido perfetto su un solido cilindrico in esso immerso e uniformemente rotante intorno ad un asse parallelo alle proprie generatrici. Il moto (assoluto) del liquido è piano, irrotazionale, permanente rispetto al solido, e giova riferirne gli elementi, su un generico strato, ad una coppia ortogonale $x Oy$ rotante assieme alla sezione S del solido e coll'origine nella traccia dell'asse di rotazione. Le componenti u e v della velocità, il potenziale cinetico φ e la funzione di corrente ψ dipendono solo da x e y e son tali che $w = u - iv$ e $f = \varphi + i\psi$ sono funzioni di $z = x + iy$ legate dalla relazione

$$w = \frac{df}{dz}.$$

Detta μ la densità del liquido, ω il valore della velocità angolare costante del solido, la pressione dinamica è espressa da

(1) Nella seduta dell'11 aprile 1926.

$$(1) \quad p_d = -\mu \frac{u^2 + v^2}{2} + \mu\omega (xv - yu)^{(1)},$$

È con la scorta della (1) che si può arrivare a formule integrali analoghe a quelle del Blasius ⁽²⁾ e altrettanto utili pel calcolo della risultante e del momento risultante delle azioni dinamiche su un tratto di linea di flusso del *moto relativo*; il caso interessante è quello in cui tale linea di flusso è il contorno s di S . Ecco i risultati.

Dette R_x e R_y le componenti della risultante, M il valore del momento risultante rispetto all'origine (e sinistrorso) delle azioni dinamiche per unità di lunghezza del solido, si ha:

$$(2) \quad R_y + iR_x = -\frac{\mu}{2} \int_s w^2 d\zeta - i\mu\omega \int_s w\zeta d\zeta - i\mu\omega^2 \bar{\zeta}_0 S,$$

$$(3) \quad M = -\frac{\mu}{2} \int_s w^2 \zeta d\zeta;$$

in queste formule $\bar{\zeta}_0$ è l'affissa del baricentro geometrico di S , \Re indica «parte reale», il soprasegno applicato ad una quantità complessa indica la coniugata di questa e gli integrali s'intendono valutati percorrendo s in modo da lasciare alla sinistra S .

Le formule scritte sono generali; valgono anche se il campo del moto è pluriconnesso (ciò che si verifica quando il moto è indotto da più solidi cilindrici rotanti, s essendo sempre il contorno della sezione di quello sul quale si calcola l'azione dinamica), e esternamente limitato; la (1), da cui

(1) La pressione dinamica p_d è la differenza tra quella effettiva p e quella statica p_0 . Dall'equazione dei moti irrotazionali:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{u^2 + v^2}{2} - U + \frac{p}{\mu} \right) = 0,$$

(dove U è il potenziale delle forze unitarie di massa agenti sul liquido), ove si noti che nel caso attuale la derivata locale della velocità è $-\omega \text{ grad} (xv - yu)$ (ciò che si dimostra senza difficoltà) si deduce

$$p = K - \mu \frac{u^2 + v^2}{2} + \mu\omega (xv - yu) + \mu U; \quad (K \text{ cost. arbitraria});$$

facendo in questa $u = v = 0$ si ottiene $p_0 = K + \mu U$ indi, per differenza, l'espressione (1) di p_d . In assenza di forze di massa la p coincide con quella già determinata dal prof. Cisotti nella Nota *Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito*. («Atti del R. Ist. Veneto», 1909-10, p. 442).

(2) V. ad es. CISOTTI, *Idromeccanica Piana*, n. 105. Evidentemente le formule del Blasius, che si deducono assumendo $p_d = -\frac{\mu}{2}(u^2 + v^2)$, non sono applicabili ai casi in cui la distribuzione delle pressioni dinamiche non è più regolata dal teorema di Bernoulli.

esse discendono, non implica nessuna condizione riguardo al campo del moto (lo mostra la semplice dimostrazione nella nota a piè di pagina).

Se il campo del moto è illimitato e il moto è indotto da un sol cilindro le (2) e (3) divengono:

$$(4) \quad R_x + iR_y = -\mu\omega \int \omega z dz - \mu\omega^2 \zeta_0 S, \quad M = 0;$$

se, di più, il potenziale f è uniforme:

$$(5) \quad R_x + iR_y = \mu\omega \int f dz - \mu\omega^2 \zeta_0 S, \quad M = 0^{(1)}.$$

L'uso di queste formule è assai vantaggioso perchè, risolto il problema idrocinetico, gli integrali che vi compaiono si calcolano mediante il teorema dei residui.

2. Parto, infatti, dalla (1) deducendone le seguenti espressioni di R_x , R_y , M :

$$\begin{aligned} R_x &= -\mu \int_s \left\{ -\frac{u^2 + v^2}{2} + \omega(xv - yu) \right\} dy, \\ R_y &= \mu \int_s \left\{ -\frac{u^2 + v^2}{2} + \omega(xv - yu) \right\} dx, \\ M &= \mu \int_s \left\{ -\frac{u^2 + v^2}{2} + \omega(xv - yu) \right\} \{ x dx + y dy \}, \end{aligned}$$

che scrivo come segue:

$$\begin{aligned} R_y + iR_x &= \mu \int_s \left\{ -\frac{u^2 + v^2}{2} + \omega(xv - yu) \right\} \{ dx - idy \}, \\ M &= \mu \Re \int_s \left\{ -\frac{u^2 + v^2}{2} + \omega(xv - yu) \right\} \{ x + iy \} \{ dx - idy \}; \end{aligned}$$

poichè su s , ch'è linea di flusso del moto relativo, è

$$(6) \quad (u + \omega y) dy - (v - \omega x) dx = 0,$$

(1) Trovai recentemente le (5) per via diretta nella Nota *Azioni dinamiche che un liquido indefinito esercita su un solido cilindrico uniformemente ruotante* (« Rend. R. Ist. Lombardo », febbraio 1926).

gli integrali delle formule precedenti non mutano se si aggiunge loro, rispettivamente,

$$-i \int_s \{u - iv\} \{ (u + \omega y) dy - (v - \omega x) dx \},$$

$$-i \int_s \{u - iv\} \{ x + iy \} \{ (u + \omega y) dy - (v - \omega x) dx \},$$

con che si ottiene:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_y + iR_x = \mu \int_s \left\{ -\frac{1}{2} w^2 d\bar{\zeta} - \omega (y + ix) (udx + vdy) \right\}, \\ M = \mu \Re \int_s \bar{\zeta} \left\{ -\frac{1}{2} w^2 d\bar{\zeta} - \omega (y + ix) (udx + vdy) \right\}. \end{array} \right.$$

Per quanto ricordai al n. 1 è $udx + vdy = d\varphi = d\bar{f} + id\psi$; su s (ove s'intendono valutati i differenziali) è, per la (6), $d\psi = -\omega(xdx + ydy)$ quindi $d\varphi = w d\bar{\zeta} - i\omega(xdx + ydy)$; sostituendo nella prima delle (7) a $udx + vdy$ questa espressione e a $y + ix$ l'equivalente $i\bar{\zeta}$ si ha

$$R_y + iR_x = -\frac{\mu}{2} \int_s w^2 d\bar{\zeta} - i\mu\omega \int_s \bar{w} \bar{\zeta} d\bar{\zeta} - \mu\omega^2 \int_s \bar{\zeta} (xdx + ydy);$$

da questa, trasformando l'ultimo integrale col teorema di Green, si ha l'annunciata (2). Dalla seconda delle (7) si ha, senza calcoli, la (3): basta osservare che, essendo $\zeta(y + ix) = i(x^2 + y^2)$, il contributo portato all'integrale dal secondo termine tra graffe è immaginario puro.

Se il campo del moto è illimitato e semplicemente connesso, la w , in forza del suo significato fisico, è regolare e uniforme su tutto il piano fuori di S ed ha uno zero all'infinito (ove il liquido è in quiete); i suoi punti singolari sono in S . Ne segue che fuori di un cerchio γ col centro nell'origine e contenente S varrà uno sviluppo del tipo

$$w = \frac{a_1}{\bar{\zeta}} + \frac{a_2}{\bar{\zeta}^2} + \dots;$$

anche w^2 e $w^2 \bar{\zeta}$ sono regolari e uniformi fuori di S , e valendo fuori di γ gli sviluppi

$$w^2 = \frac{a_1^2}{\bar{\zeta}^2} + \frac{2a_1 a_2}{\bar{\zeta}^3} + \dots, \quad w^2 \bar{\zeta} = \frac{a_1^2}{\bar{\zeta}} + \frac{2a_1 a_2}{\bar{\zeta}^2} + \dots,$$

si annullano all'infinito; in questo punto i residui di $w, w^2, w^2 \chi$ sono rispettivamente $-a_1, 0, -a_1^2$ per cui saranno $a_1, 0, a_1^2$ le somme dei residui dei rispettivi punti singolari, che sono in S : ne segue che

$$\int w d\chi = 2\pi i a_1, \quad \int w^2 d\chi = 0, \quad \int w^2 \chi d\chi = 2\pi i a_1^2;$$

poichè $w d\chi = (u dx + v dy) + i(udy - v dx) = (u dx + v dy) - i\omega(x dx + y dy)$, in virtù della (6), il primo di questi integrali è reale (ed ha l'importante significato fisico di *circolazione* su s): ne segue che a_1 è immaginario e quindi

$$\Re \int w^2 \chi d\chi = 0;$$

tenendo conto di questa e della seconda delle precedenti si deducono subito, dalle (2) e (3), le (4)⁽¹⁾.

Se, di più, la f è uniforme, avendosi allora

$$\int w \chi d\chi = \int \chi df = - \int f d\chi,$$

dalle (4) discendono le (5).

Astrofisica. — Sulla causa delle « ombre volanti ». Nota del prof. ELIGIO PERUCCA presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. G. ARMELLINI.

Il prof. Armellini ha recentemente ⁽³⁾ proposto una spiegazione delle *ombre volanti* che riconduce questo fenomeno a un caso particolare e semplice di diffrazione: le *ombre volanti* sarebbero, secondo l'Armellini, le frange di diffrazione del bordo della Luna; l'ombra della Luna sulla Terra si muove col suo corteo di frange di diffrazione, donde l'estrema mobilità

(1) Se S è un cerchio di raggio r e si assume Ox passante pel suo centro, cosicchè $\chi_0 = h$ (h distanza dell'asse del cilindro rotante dall'asse di rotazione), si ha:

$$f = -\frac{iC}{2\pi} \log(\chi - h) - \frac{i\omega hr^2}{\chi - h}, \quad w = -\frac{iC}{2\pi} \frac{1}{\chi - h} + \frac{i\omega hr^2}{(\chi - h)^2};$$

(v. MASOTTI, *Rotazione uniforme di un solido cilindrico in un liquido perfetto indefinito. Estensione del teorema di Kutta e Joukowski*, in questi « Rend. » genn. 1926). C è la circolazione intorno al cilindro. Applicando le (4) si ha che la risultante delle azioni dinamiche sul cilindro passa per O e le sue componenti sono:

$$R_x = -\mu\omega h C + \pi\mu\omega^2 hr^2, \quad R_y = 0.$$

(v. le form. (18) della Nota citata).

(2) Nella seduta del 18 aprile 1926.

(3) « Rend. Linc. », 2^o vol., 2^o sem., p. 371, 1925.

delle *ombre volanti*. La distanza tra le frange di diffrazione calcolata dall'Armellini si accorda bene con le distanze osservate, e questo accordo rende particolarmente suggestiva la spiegazione proposta da questo autore.

Ma a me pare che alcune obiezioni possono essere mosse alla teoria dell'Armellini.

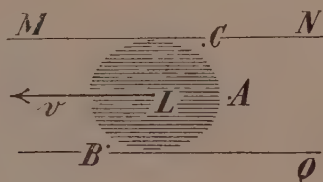
1. Il Sole non può considerarsi come sorgente di luce puntiforme. I sistemi di frange di diffrazione dovute a ciascun elemento della sua superficie si sovrappongono mascherando il semplice fenomeno di diffrazione al quale si riferiscono le formule e i calcoli dell'Armellini.

2. Il Sole non è sorgente di luce monocromatica. Dalla distanza tra le frange costituenti il fenomeno osservato, dalla loro velocità, dalla loro durata, si deduce che questo è costituito da un susseguirsi di centinaia e forse di migliaia di frange. Perchè un così gran numero di frange di diffrazione sia visibile occorre una tal monocromaticità della luce (il calcolo è presto fatto in base alla stessa formula di diffrazione posta dall'Armellini a base del suo ragionamento) che non sarebbe sufficiente a produrla nemmeno un ottimo vetro rosso. Nell'imminenza della totalità, la luce che a noi proviene dal Sole è bensì giallo-rossastra, ma non presenta il grado di monocromaticità necessario per giustificare la visibilità di un così gran numero di frange di diffrazione. D'altra parte nessun fenomeno di cromatismo delle *ombre volanti* sembra sia stato finora osservato.

3. Tutti gli osservatori sono d'accordo nel fatto che le *ombre volanti* sono frange tanto più fitte quanto più ci si inoltra nella zona dell'ombra completa (totalità dell'eclisse). L'interpretazione dell'Armellini in base alla teoria elementare della diffrazione conduce al risultato opposto.

4. La velocità di propagazione delle *ombre volanti*, misurata sul suolo nella direzione perpendicolare alle frange alternativamente chiare e scure, non appoggia l'interpretazione proposta dall'Armellini.

Se L (fig. 1) è l'ombra (completa) della Luna sulla superficie terrestre,



e il vettore v indica la velocità con cui quest'ombra si sposta, la striscia $MNPQ$ rappresenta sulla superficie terrestre il luogo dei punti ove è osservabile l'eclisse totale.

L'ombra della Luna si sposta sulla Terra con una velocità dell'ordine di 500 m./sec.. Le *ombre volanti*, nei punti A centrali della striscia $MNPQ$ dovrebbero procedere con tale velocità se fossero frange di diffrazione ac-

compagnanti l'ombra della Luna. Soltanto nei punti come *C*, *B* molto prossimi ai bordi della striscia le frange di diffrazione, scorrendo, per così dire, su se stesse, apparirebbero dotate di una velocità di propagazione molto minore di 500 m./sec.

Da una recente pubblicazione⁽¹⁾, che raccoglie i dati sperimentali finora raccolti sull'argomento, si deduce che la massima velocità potuta apprezzare nelle *ombre volanti* è stata di circa 30 miglia all'ora, cioè di circa 15 m./sec. D'altronde, per la persistenza delle immagini sulla retina, l'osservazione delle *ombre volanti*, nel caso di velocità più ragguardevoli, è impossibile senza l'uso di particolari artifici.

Dunque le *ombre volanti* finora osservate non potrebbero esser state viste che in due zone corrispondenti ai due bordi *MN*, *PQ* aventi ciascuno una larghezza di circa $\frac{1}{2000}$ della larghezza della striscia *MNPQ*.

Risulta invece⁽²⁾ che numerose osservazioni di *ombre volanti* furono fatte anche nella parte centrale di tale striscia.

A me par dunque che, se il fenomeno delle *ombre volanti* è un fenomeno di diffrazione, esso deve essere più complesso e indiretto di quanto non risulti dalla teoria svolta dal prof. Armellini⁽³⁾. La mancanza di cromatismo e la velocità con cui queste ombre si propagano inducono piuttosto a cercarne la causa nella nostra atmosfera.

Fisica. — *Sopra l'intensità delle righe proibite, nei campi magnetici intensi.* Nota di ENRICO FERMI, presentata⁽⁴⁾ dal Socio A. GARBASSO.

Nello spettro emesso da un atomo perturbato da un intenso campo elettrico o magnetico si osservano spesso delle righe o delle serie di righe

(1) G. HORN, « Mem. Soc. Astr. It. », 3, p. 73, 1924.

(2) G. HORN, lav. cit., p. 61.

(3) Tenendo conto p. es. della forma sferica della Luna. - Il prof. Armellini ha avuto la cortesia di comunicarmi recentemente una modificazione alla sua teoria per tener conto della estensione della sorgente luminosa. Sulle frange di diffrazione ottenibili con sorgente di luce estesa si hanno appunto due lavori recenti di F. Wolfers (« Jour. de Phys. », 6, pp. 305, 354; 1925). Nel secondo di questi lavori si descrivono frange di interferenza-diffrazione che contornano l'ombra di un corpo opaco, nel caso di una sorgente di luce estesa. Se si volessero identificare le *ombre volanti* con tale nuovo tipo di frange, le mie obiezioni 2, 3, 4, sussisterebbero ancora.

Nel fascicolo 5 di questi « Rendiconti » il dr. Ronchi espone succintamente buona parte delle idee esposte in questa nota. Non tanto per una questione di priorità, quanto a mia giustificazione devo dichiarare che fin dal 19 gennaio u. s. avevo comunicato al prof. Armellini le mie osservazioni; esse sono dunque del tutto indipendenti dal lavoro del Ronchi.

(4) Nella seduta del 21 marzo 1926.

che non apparivano nello spettro dell'atomo imperturbato. Questo fenomeno ci viene spiegato al modo seguente dal principio di corrispondenza di Bohr ⁽¹⁾: È noto che le frequenze di tutte le righe che un atomo può emettere, si possono rappresentare come differenze di termini spettroscopici; non però a tutte le possibili differenze di termini corrispondono delle righe che possono venire emesse dall'atomo. Il criterio dato da Bohr perchè una combinazione di due termini sia possibile è che nello sviluppo in serie di Fourier del moto dell'elettrone luminoso figuri la componente armonica che corrisponde al salto tra i due termini; e in questo caso la intensità della riga è approssimativamente eguale alla intensità con cui la componente armonica corrispondente verrebbe emessa secondo la elettrodinamica classica, cioè proporzionale al quadrato dell'ampiezza della componente medesima. Si capisce ora come la perturbazione dell'orbita dell'elettrone luminoso per opera di un campo esterno possa generare nel suo moto delle componenti armoniche che mancavano nel moto imperturbato; e corrispondentemente a queste appariranno nello spettro delle nuove righe che non esistevano in assenza di campo perturbatore.

In questo lavoro mi propongo di studiare da questo punto di vista l'intensità delle nuove righe che appaiono in campi magnetici intensi ⁽²⁾. A questo problema è strettamente legato quello della distruzione della metastabilità di certi stati quantici nel campo magnetico. Vi sono certi stati da cui non è possibile altra uscita che attraverso a qualche salto quantico proibito. In assenza di perturbazioni dunque l'atomo che si trovi in uno di questi stati non ha alcun mezzo per uscirne, per modo che la sua vita media è infinita; se però l'atomo è soggetto a una opportuna perturbazione, p. e. a un campo magnetico, la vita media dello stato metastabile diventa finita.

Limitiamo le nostre considerazioni ai così detti termini di primo grado ⁽³⁾ (erster Stufe). A questo tipo appartengono, come si sa, gli spettri dei metalli alcalini, dei metalli terrosi, e tutti i termini normali degli alcalino-terrosi. Come modello meccanico dei termini di primo grado si può prendere la rappresentazione vettoriale di Landé ⁽⁴⁾. Secondo questa una orbita stazionaria dell'atomo è rappresentata, oltre che dal quanto totale n , da tre altri numeri quantici ⁽⁵⁾ K , R , J , ai quali vengono attribuiti risp. i significati di momento dell'elettrone luminoso, momento del nocciolo e ri-

(1) N. BOHR, «Zs. f. Phys.», 9, 1922, 27.

(2) Per l'osservazione sperimentale di tali righe si veda: PASCHEN e BACK, «Physica», 1, 1921, 261.

(3) A. LANDÉ e W. HEISENBERG, «Zs. f. Phys.», 25, 1924, 279.

(4) A. LANDÉ, *ibid.*, 15, 1923, 189. Nel caso di termini di primo grado k viene a coincidere con l , così che basta considerare le interazioni tra k ed r : W. HEISENBERG, «Zs. f. Phys.», 32, 1925, 841; RUSSEL e SAUNDERS, «Astr. Journ.», 61, 1925, 38.

(5) In tutto questo lavoro indicheremo con le lettere maiúscole R , K , J , M , i numeri quantici, e con le minuscole r , k , j , m le quantità di moto corrispondenti.

sultante dei due precedenti, cioè momento totale dell'atomo. Se l'atomo si trova in un campo magnetico H bisogna introdurre un altro quanto, M , che è la proiezione di J sulla direzione di H . Il carattere cinematico dell'orbita può, in assenza di campo magnetico, descriversi al modo seguente⁽¹⁾: Nel piano perpendicolare a k l'elettrone descrive un moto a rosetta, cioè un moto periodico con una precessione uniforme nel suo piano. Il piano dell'orbita non resta fisso nello spazio, perchè tutto l'atomo, e quindi anche i vettori k ed r , hanno un moto di precessione uniforme attorno a j , che, in assenza di forze esterne, conserva direzione invariabile nello spazio per il principio della conservazione delle quantità di moto areali; l'azimuth di questa precessione, φ_j , è la coordinata angolare coniugata a j . Quando l'atomo è posto in un campo magnetico esterno la direzione di j non resta più invariabile, poichè tanto k che r vengono ad assumere un moto di precessione attorno al campo magnetico. Ora per render conto dell'effetto Zeeman anormale e dell'effetto Paschen Back bisogna ammettere che k sia sollecitato a precedere con la frequenza normale di Larmor

$$(1) \quad \Omega = \frac{e H}{4 \pi m c} = 1,4 \cdot 10^6 \cdot H$$

mentre r sia sollecitato a precedere con frequenza doppia. Di questo fatto hanno recentemente tentato di dare una spiegazione Uhlenbeck e Goudsmit⁽²⁾ cambiando il significato modellistico di r ; che viene da essi interpretato come momento complessivo dei moti di rotazione degli elettroni; per quanto ardita possa sembrare, questa ipotesi rende certamente conto di un numero considerevole di fatti spettroscopici. L'effetto complessivo di questa diversa azione del campo sopra k ed r , finchè H è piccolo, consiste semplicemente nell'imprimere a tutto l'atomo un moto di precessione uniforme attorno ad H , con una frequenza anomala espressa da $g \Omega$, dove g è il fattore di separazione; l'azimuth φ_m di questa precessione è la coordinata angolare coniugata a m . Quando invece i momenti esercitati da H su k ed r diventano dello stesso ordine di grandezza della interazione tra r e k , il carattere uniforme di questa precessione viene ad esser turbato, poichè r tende a precedere più rapidamente di k ; contemporaneamente viene anche turbata la precessione attorno ad j . La disuniformità di queste precessioni ha per effetto che nello sviluppo in serie di Fourier del moto dell'elettrone luminoso vengono ad apparire delle nuove componenti armoniche, e da ciò ha origine l'apparizione delle nuove righe. Prima di passare al calcolo della loro intensità vogliamo esporre brevemente i risultati raggiunti.

In assenza di campi magnetici, o in campi magnetici deboli si trova che J ed M possono in un salto quantico variare soltanto di ± 1 o 0

(1) A. SOMMERFELD e W. HEISENBERG, « Zs. f. Phys. », 17, 1922, 131.

(2) G. E. UHLENBECK e S. GOUDSMIT, « Naturw. », 13, 1925, 953.

Inoltre non può avvenire per il quanto J la combinazione $1/2 \rightarrow 1/2$, e per il quanto M non può avvenire la combinazione $0 \rightarrow 0$ quando sia contemporaneamente $\Delta J = 0$. In campi magnetici forti, si trova che non valgono più le regole di selezione per J , e si possono osservare sia la transizione $1/2 \rightarrow 1/2$ che anche quelle per cui $\Delta J = 2$, $\Delta J = 3$, ecc. La dipendenza della intensità delle nuove righe dal campo H , è diversa da riga a riga. Un primo tipo è costituito dalle righe che corrispondono al passaggio $1/2 \rightarrow 1/2$, oppure a $\Delta J = 2$, e per queste l'intensità è approssimativamente proporzionale ad H^2 ; il secondo tipo è quello delle righe per cui $\Delta J = 3$, e per esse l'intensità è proporzionale ad H^4 , ecc. Per le righe del primo tipo l'intensità è data da

$$(2) \quad I = \alpha I_0 \omega^2 / \omega^2$$

dove I_0 è l'intensità del multipletto, ω la sua separazione⁽¹⁾, ed α un coefficiente numerico esprimibile in funzione dei numeri quantici.

Alla funzione Hamiltoniana H del nostro modello atomico, nel caso di multipletti che obbediscano alla regola degli intervalli si può dare la forma⁽²⁾

$$(3) \quad \frac{1}{h} H = \omega j^2 + \Omega \left\{ m \left(\frac{3}{2} + \frac{r^2 - k^2}{2 j^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\cos \varphi_j}{2 j^2} \sqrt{(j^2 - m^2) [(r + k)^2 - j^2] [j^2 - (r - k)^2]} \right\}$$

In assenza di campo j , m , φ_j , φ_m sono coordinate angolari. Quando il sistema è perturbato dal campo si passerà da queste alle nuove coordinate angolari J , M , Φ_j , Φ_m mediante la trasformazione canonica definita dalla funzione trasformatrice

$$S = J \varphi_j + M \varphi_m + \Omega S_1(J, M, \varphi_j, \varphi_m).$$

Applicando i metodi della teoria delle perturbazioni⁽³⁾ si trova

$$S_1 = - \frac{\sin \varphi_j}{4 \omega j^3} \sqrt{(J^2 - M^2) [(K + R)^2 - J^2] [J^2 - (K - R)^2]}$$

la trasformazione canonica risulta dunque data da

$$(4) \quad j = J - \frac{\Omega}{\omega} A \cos \Phi_j; m = M; \varphi_j = \Phi_j + \frac{\Omega}{\omega} B \sin \Phi_j; \varphi_m = \Phi_m + \frac{\Omega}{\omega} C \sin \Phi_j$$

(1) Il significato preciso di ω per multipletti che obbediscono alla regola degli intervalli (LANDÉ, loc. cit.) è tale che la differenza di due termini del multipletto aventi i quanti interni J e J' sia $\Delta v = \omega (J^2 - J'^2)$.

(2) PAULI, «Zs. f. Phys.», 20, 1924, 371; HEISENBERG, ibid. 26, 1924, 291. Un calcolo simile a questo si trova in LANDÉ, ibid., 30, 1924, 329. A questo rimandiamo per alcuni dettagli del seguente calcolo di perturbazioni.

(3) BORN e PAULI, «Zs. f. Phys.», 10, 1922, 137.

dove si è posto

$$(5) \quad A = \frac{1}{4j} \sqrt{(J^2 - M^2)[(K + R)^2 - J^2][J^2 - (K - R)^2]};$$

$$B = \frac{\partial A}{\partial J} \quad ; \quad C = \frac{\partial A}{\partial M}.$$

Le formule (4) e (5) risolvono completamente la parte meccanica del nostro problema. Troviamo in particolare in esse la conferma del fatto che in un campo magnetico di intensità finita le precessioni attorno a j e ad H non sono uniformi. Dobbiamo ora fare lo sviluppo in serie di Fourier delle coordinate dell'elettrone luminoso. Per far questo possiamo servirci di alcune formule stabilite da Sommerfeld e Heisenberg⁽¹⁾ per l'analogo sviluppo in serie di Fourier in campi infinitamente deboli. È chiaro infatti che quelle formule conserveranno la loro validità anche nel nostro caso, purchè per $o_j t$ e $o_m t$ si sostituisca risp. φ_j e φ_m . Naturalmente i coefficienti C_{srq} e D_{srq} delle formule (9) di Sommerfeld e Heisenberg, che nel loro caso sono costanti, nel caso nostro saranno invece funzioni del tempo; poichè essi sono funzioni di j che, in virtù della prima delle (4) è a sua volta funzione del tempo. Per esprimere esplicitamente le C e le D in funzione di j basta porre nelle formule (10) e (7) di Sommerfeld e Heisenberg per Θ e θ i valori che risultano dal loro significato geometrico, e cioè.

$$(6) \quad \cos \Theta = M/j \quad ; \quad \cos \theta = (j^2 + K^2 - R^2)/2Kj.$$

Dobbiamo ora sostituire nelle formule (9) di Sommerfeld e Heisenberg per j , φ_j , φ_m i loro valori (4). Troviamo allora, nella nostra approssimazione,

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} X + iY &= \sum_{srq} \left\{ C_{srq} - \frac{\Omega A}{\omega} \frac{\partial C_{srq}}{\partial J} \cos \Phi_j \right\} \left\{ 1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\Omega}{\omega} (qB + C) \sin \Phi_j \right\} e^{i(s o_n t + r o_k t + q \Phi_j + \Phi_m)} \\ Z &= \sum_{srq} \left\{ D_{srq} - \frac{\Omega A}{\omega} \frac{\partial D_{srq}}{\partial J} \cos \Phi_j \right\} \left\{ 1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\Omega}{\omega} qB \sin \Phi_j \right\} e^{i(s o_n t + r o_k t + q \Phi_j)}. \end{aligned} \right.$$

Sviluppando le precedenti espressioni in serie di Fourier rispetto alla coordinata angolare Φ_j si trova che esse contengono, limitandosi alla nostra approssimazione, soltanto termini in $e^{\pm 2i\Phi_j}$, $e^{\pm i\Phi_j}$, 1; questi termini corrispondono ai salti quantici $J \rightarrow J \pm 2$, $J \rightarrow J \pm 1$, $J \rightarrow J$. Le compo-

(1) SOMMERFELD e HEISENBERG, loc. cit., form. (9), (10) e (7).

nenti armoniche corrispondenti ai salti $J \rightarrow J \pm 2$ e $^{1/2} \rightarrow ^{1/2}$ hanno ampiezza proporzionale a Ω/ω ; le corrispondenti probabilità di transizione saranno perciò proporzionali a Ω^2/ω^2 , ciò che giustifica la (2). Se avessimo spinta la nostra approssimazione fino a comprendere anche i termini in Ω^2/ω^2 , avremmo trovato, nello sviluppo in serie precedente anche dei termini corrispondenti al salto quantico $J \rightarrow J \pm 3$. La ampiezza delle righe corrispondenti risulta dunque proporzionale ad H^2 e quindi la loro intensità ad H^4 .

A titolo di esempio consideriamo le transizioni proibite $J = ^{1/2} \rightarrow J = ^{1/2}$. Per queste si ha una sola componente Zeeman, per cui $M = 0$, $\Delta M = 0$; le componenti armoniche corrispondenti si troveranno perciò solo nello sviluppo di Z ; dalle (6) risulta inoltre in questo caso $\cos \Theta = 0$. Le formule (10) e (7) di Sommerfeld e Heisenberg ci dànno allora

$$D_{s,r,0} = 0; D_{s,1,1} + D_{s,1,-1} = \frac{1}{2} a_s \cos \theta; D_{-s,-1,1} + D_{-s,-1,-1} = \frac{1}{2} a_s \cos \theta.$$

Le componenti armoniche cercate risultano dunque

$$-\frac{\Omega}{4\omega} \left(B \cos \theta + A \frac{\partial \cos \theta}{\partial J} \right) \left\{ a_s e^{i(\epsilon_{o_n} + \epsilon_k)t} + \bar{a}_s e^{-i(\epsilon_{o_n} + \epsilon_k)t} \right\}.$$

La corrispondente probabilità di transizione è perciò proporzionale a

$$(8) \quad \frac{\Omega^2}{\omega^2} \left(B \cos \theta + A \frac{\partial \cos \theta}{\partial J} \right)^2 |a_s|^2$$

parimenti la probabilità di transizione per il salto quantico non proibito tra i termini omologhi per cui $\Delta J = 1$ risulta proporzionale a

$$(9) \quad (1 + \cos \theta)^2 |a_s|^2.$$

Come esempio concreto calcoliamo la vita media dello stato metastabile $2p_3$ degli elementi del secondo gruppo del sistema periodico. Dallo stato $2p_3$ l'unica via di uscita è quella che porta allo stato normale $1S$ attraverso il salto proibito $1S - 2p_3$. Le espressioni (8) e (9) saranno dunque inversamente proporzionali alle vite medie τ_3 e τ_2 degli stati $2p_3$ e $2p_2$. Come valori di (8) e (9) prenderemo le medie aritmetiche tra i loro valori corrispondenti agli stati iniziale e finale. Si trova così che (8) e (9) sono risp. proporzionali a $0,006 \Omega^2/\omega^2$ e $1,6$; risulta dunque

$$\tau_3/\tau_2 = 270 \omega^2/\Omega^2.$$

P. e. per il magnesio si ha $\omega = 3 \cdot 10^{11}$. In un campo di 50.000 Gauss si ha poi $\Omega = 7 \cdot 10^{10}$. Risulta dunque $\tau_3 = 5000 \tau_2$. Se ammettiamo che τ_2 sia dell'ordine di grandezza di 10^{-7} secondi troviamo infine $\tau_3 = 5 \cdot 10^{-4}$.

Fisica. — *Sopra la polarizzazione della luce emessa per urto elettronico.* Nota di FRANCO RASETTI, presentata dal Socio A. GARBASSO.

Quando un elettrone che urta un atomo possiede una energia cinetica uguale o superiore al quanto di una riga di risonanza dell'atomo stesso, l'energia $h\nu$ può esser ceduta dall'elettrone all'atomo, col passaggio di questo in uno stato quantico superiore: il processo inverso, cioè il ritorno dell'atomo nello stato normale, è accompagnato dall'emissione di radiazione monocromatica.

Può darsi che, in queste circostanze, si trovi nell'onda luminosa emessa qualche elemento di simmetria relativo all'esistenza, per l'atomo, di una direzione privilegiata: quella del moto dell'elettrone urtante. Per esempio, se osserviamo la luce emessa da atomi bombardati mediante un fascio di elettroni sensibilmente parallelo, in una direzione normale al moto degli elettroni stessi, è ammissibile che la componente dell'intensità luminosa con la forza elettrica parallela alla velocità degli elettroni possa esser diversa dalla componente ortogonale, cioè la luce sia polarizzata almeno in parte.

Recentemente sono state compiute due ricerche dirette ad osservare questo fenomeno. L'esperienza è stata fatta da prima da Kossel e Gerthsen ⁽¹⁾ sul sodio, con esito negativo: la sensibilità del metodo adoperato era sufficiente a rivelare una polarizzazione del 5-10 %. Più tardi Ellett, Foote e Mohler ⁽²⁾ hanno confermato il risultato di Kossel e Gerthsen sul sodio, e invece hanno ottenuto un effetto perfettamente osservabile col mercurio. Eccitando la riga di risonanza di questo elemento $\lambda = 2536 \text{ \AA}$ con elettroni di 6-7 volts (il potenziale di risonanza essendo 4,9 volts), essi hanno ottenuto una polarizzazione del 30 %: avendo maggiore intensità la componente con la forza elettrica normale alla direzione del moto degli elettroni.

In ambedue i lavori citati sono premesse considerazioni teoriche, dirette a prevedere, almeno approssimativamente, l'andamento del fenomeno. Kossel e Gerthsen considerano l'eccitazione dell'elettrone luminoso dell'atomo, per effetto dell'altro elettrone, spiegabile col meccanismo dell'urto di due sfere elastiche: e trovano una relazione fra l'energia ceduta e la direzione di oscillazione. Ellett, Foote e Mohler, facendo l'ipotesi che l'elettrone urtante perda nell'eccitare l'atomo la totalità della propria energia cinetica, applicano al processo dell'emissione il principio della conserva-

(1) Nella seduta del 21 marzo 1926.

(2) KOSSSEL e GERTHSEN, « Ann. der Phys. », 77, 273, 1925.

(3) ELLETT, FOOTE e MOHLER, « Phys. Rev. », 27, 31, 1926.

zione della quantità di moto areale. Ma ambedue questi tipi di considerazioni sono assai poco soddisfacenti, sia dal punto di vista concettuale, sia per il risultato, in quanto danno una polarizzazione in senso contrario a quella osservata nel mercurio, e non ne spiegano l'assenza nel sodio.

Vediamo ora invece come sia possibile farci un'idea abbastanza chiara del fenomeno in ambedue i casi, considerandolo in relazione con l'emissione della radiazione per risonanza.

È noto che la radiazione diffusa da un atomo, quando venga illuminato con luce della frequenza di una sua riga di risonanza, è, almeno parzialmente, polarizzata. In queste condizioni, l'atomo di mercurio si comporta con molta approssimazione come un oscillatore elastico isotropo: cioè la polarizzazione della luce diffusa è quale si otterrebbe da un elettrone vibrante nella direzione della forza elettrica della luce eccitatrice. Illuminando con luce polarizzata rettilineamente, si ha dunque (in assenza di cause perturbatrici, come campi magnetici, urti molecolari, ecc.) risonanza quasi completamente polarizzata⁽¹⁾.

Diversamente accade per l'atomo di sodio, perché in questo caso la radiazione di risonanza, in assenza di campo magnetico, presenta, come effetto cumulativo di D_1 e D_2 , una polarizzazione soltanto del 5%.

Nello studio della radiazione di risonanza nel campo magnetico, la schematizzazione dell'atomo come oscillatore classico ha dato risultati d'accordo con l'esperienza⁽²⁾; cerchiamo pertanto di applicare lo stesso meccanismo nel nostro caso, cioè di calcolare la polarizzazione della radiazione emessa da un oscillatore eccitato dal passaggio, ad una certa distanza da esso, di un elettrone di una velocità determinata.

Disgraziatamente non si può eseguire il calcolo nel caso corrispondente all'esperienza, cioè nel quale l'elettrone, urtando l'atomo, perde la quasi totalità della propria energia cinetica; il problema può esser trattato invece trascurando la reazione dell'atomo sull'orbita dell'elettrone, cioè supponendo la velocità di questo costante. Il che vale approssimativamente soltanto se l'energia cinetica dell'elettrone è grande in confronto al quanto ceduto. I risultati della presente teoria non si potranno dunque applicare senz'altro al caso sperimentale, ma in ogni modo sono interessanti perché mostrano un tipo di meccanismo che dà una polarizzazione della luce emessa per urto, corrispondente come senso e come ordine di grandezza a quella osservata.

Consideriamo un oscillatore di frequenza propria ν_0 , ed un elettrone passi con velocità v costante in vicinanza di esso, in direzione x . Chiamiamo b la minima distanza, in direzione y , tra la retta percorsa dall'elettrone e l'oscillatore, e la carica elettronica, e t il tempo contato dall'istante

(1) WOOD e ELLETT, «Proc. Roy. Soc.», 103, 396, 1923.

(2) HANDE, «Zs. f. Physik», 90, 93, 1934. FERRARIS e ROBERTI, «Rend. Lincei», Serie II, 1° sem., p. 716; 2° sem., p. 117, 1925.

in cui l'elettrone si trova alla minima distanza. Allora le componenti della forza elettrica agente sull'oscillatore sono rispettivamente:

$$E_x = \frac{e v t}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}}, \quad E_y = \frac{e b}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}}.$$

Sviluppando tali espressioni in serie di Fourier ⁽³⁾, si vede facilmente che questi campi elettrici equivalgono a quelli di due onde luminose, per le quali la distribuzione dell'intensità in funzione della frequenza è rispettivamente:

$$I_x(v) dv = \frac{c e^2 v^2}{2 \pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t \sin 2 \pi v t dt}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} \right)^2 dv;$$

$$I_y(v) dv = \frac{c e^2 b^2}{2 \pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2 \pi v t dt}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} \right)^2 dv.$$

Queste formule sono esprimibili mediante le funzioni K di Bessel, di ordine rispettivamente zero ed uno; si ha precisamente:

$$I_x(v) dv = \frac{8 \pi c e^2 v^2}{v^4} K_0^2 \left(\frac{2 \pi v b}{v} \right) dv,$$

$$I_y(v) dv = \frac{8 \pi c e^2 v^2}{v^4} K_1^2 \left(\frac{2 \pi v b}{v} \right) dv.$$

Chiamiamo ora $\alpha(v)$ il coefficiente di assorbimento dell'oscillatore per la frequenza v ; cioè che equivale a dire, che se esso è soggetto a radiazione di intensità $I(v) dv$, assorbe in media un'energia $\alpha(v) I(v) dv$. Facciamo prima il caso dell'oscillatore isotropo (mercurio), nel quale tutta l'energia assorbita per azione del campo elettrico E_x è impiegata nell'imprimere oscillazioni in direzione x , e analogamente per E_y . In questa ipotesi, l'energia delle oscillazioni impresse all'atomo nelle due direzioni ortogonali sarà rispettivamente:

$$W_x = \int_0^\infty \alpha(v) I_x(v) dv, \quad W_y = \int_0^\infty \alpha(v) I_y(v) dv.$$

Ma possiamo osservare che $\alpha(v)$ ha un valore sensibilmente diverso da zero soltanto in vicinanza della frequenza propria v_0 , così che si potrà scrivere:

$$W_x = \alpha I_x(v_0) \quad ; \quad W_y = \alpha I_y(v_0)$$

(3) FERMI, « Zs. f. Phys. », 29, 315, 1924.

avendo posto:

$$\alpha = \int_0^\infty \alpha(v) dv.$$

Osserviamo la radiazione emessa dall'oscillatore in una direzione perpendicolare ad x , formante un angolo ϑ con l'asse y . Le oscillazioni dovute alla forza elettrica E_x daranno luce polarizzata col vettore elettrico in direzione x , e di intensità proporzionale a W_x ; quelle in direzione y daranno luce polarizzata in direzione ortogonale, e di intensità proporzionale a $W_y \sin^2 \vartheta$.

La polarizzazione risulta dunque subito, in questo caso, dal rapporto:

$$\frac{W_x}{W_y \sin^2 \vartheta} = \frac{K_0^2 \left(\frac{2 \pi v_0 b}{v} \right)}{K_1^2 \left(\frac{2 \pi v_0 b}{v} \right) \sin^2 \vartheta}$$

mentre l'energia totale assorbita dall'oscillatore è:

$$W = \frac{8 \pi c e^2 v_0^2 \alpha}{v^4} \left\{ K_0^2 \left(\frac{2 \pi v_0 b}{v} \right) + K_1^2 \left(\frac{2 \pi v_0 b}{v} \right) \right\}.$$

Nel caso concreto, anzichè la luce emessa da un solo atomo per effetto di un elettrone che passa alla distanza b , osserveremo la luce emessa da un gran numero di atomi, colpiti da un fascio parallelo di elettroni; se notiamo che alla distanza b passa un numero di elettroni proporzionale a $b db$, avremo che la componente totale x della intensità luminosa emessa in direzione perpendicolare al moto degli elettroni sarà proporzionale a:

$$\int_{b_0}^\infty b K_0^2 \left(\frac{2 \pi v_0 b}{v} \right) d^2 b$$

mentre l'altra componente sarà proporzionale a:

$$\frac{1}{2 \pi} \int_0^\pi \sin^2 \vartheta d\vartheta \int_{b_0}^\infty b K_1^2 \left(\frac{2 \pi v_0 b}{v} \right) db = \frac{1}{2} \int_{b_0}^\infty b K_1^2 \left(\frac{2 \pi v_0 b}{v} \right) db.$$

È necessario porre un limite b_0 inferiore alla distanza, perchè altrimenti l'ultimo integrale diverge, e quindi l'energia assorbita diviene infinita. Analogamente a quanto si suol fare in casi simili, prenderemo come distanza minima quella per cui l'energia ceduta è un quanto $h v_0$, cioè b_0 va determinato come soluzione dell'equazione:

$$\frac{8 \pi c e^2 v_0 \alpha}{v^4} \left\{ K_0^2 \left(\frac{2 \pi v_0 b_0}{v} \right) + K_1^2 \left(\frac{2 \pi v_0 b_0}{v} \right) \right\} = h.$$

Per il mercurio, introducendo i valori numerici ⁽¹⁾:

$$\alpha = 6 \cdot 10^{-4} \quad , \quad v_0 = 1,18 \cdot 10^{15}$$

ed esprimendo la velocità in volts, mediante la relazione:

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{e V}{300}$$

si trova che da 10 volts in poi, cioè nel campo in cui è applicabile la nostra teoria, si può prendere come soluzione dell'equazione precedente, con approssimazione sufficiente:

$$x_0 = \frac{2 \pi v_0 b_0}{v} = \frac{1,2}{V}.$$

La polarizzazione è data allora dal rapporto:

$$\frac{i_t}{i_p} = \frac{\int_{x_0}^{\infty} x K_1^2(x) dx}{2 \int_{x_0}^{\infty} x K_0^2(x) dx}.$$

Eseguendo i calcoli numerici, si trova:

$$\frac{i_t}{i_p} = \frac{\log V - 0,40}{2 \left\{ 0,50 - \frac{0,7}{V^2} (\log V + \log^2 V) \right\}}$$

formula da cui si deduce direttamente la polarizzazione in funzione della velocità degli elettroni espressa in volts.

Si trovano così i seguenti valori per il grado di polarizzazione $\frac{i_t - i_p}{i_t + i_p}$:

V	$\frac{i_t - i_p}{i_t + i_p}$
10	35 %
20	46 »
30	51 »
50	56 »
100	61 »

La polarizzazione è nel senso trovato sperimentalmente, cioè $i_t > i_p$, e l'ordine di grandezza si accorda col 30 % osservato per 6-7 volts.

(1) FÜCHTBAUER, « Phys. Zs. », 21, 322, 1920; FÜCHTBAUER e JOOS, *ibid.*, p. 694.

Con la presente teoria ci si rende conto anche facilmente dell'assenza di effetto osservabile nel caso del sodio. Come si è già detto, la luce D ottenuta per risonanza con luce completamente polarizzata, presenta soltanto una polarizzazione del 5 %. Se nell'equazione che dà il limite inferiore x_0 dell'integrazione sostituiamo i valori di α e di v_0 , corrispondenti al sodio, troviamo, per uguali velocità dell'elettrone, polarizzazioni leggermente minori (s'intende, per l'oscillatore isotropo) che con i dati del mercurio. Poichè inoltre, corrispondentemente al minor potenziale di risonanza, le esperienze sul sodio sono fatte con velocità di 2-3 volts, dovremmo aspettarci, se il sodio si comportasse come il mercurio, polarizzazioni intorno al 20 %. Ma per l'accennato comportamento, nella risonanza, dell'atomo di sodio, avremo soltanto il 5 % di questi valori, quindi in definitiva una polarizzazione dell'1 % circa; il che è al disotto del limite minimo osservabile con i mezzi impiegati nelle citate ricerche.

Chimica-fisica. — *Sul potenziale di ionizzazione dell'argento* ⁽¹⁾.
Nota di GIORGIO PICCARDI presentata ⁽²⁾ dal Socio A. GARBASSO.

Foote e Mohler ⁽³⁾ hanno ordinato in serie lo spettro dell'argento ed hanno dedotto, dal limite delle serie spettrali, il valore del potenziale di ionizzazione relativo a questo elemento: 7,542 volta.

Shenstone ⁽⁴⁾ studiando gli archi a bassa tensione nei vapori di argento, ha trovato invece, per questo potenziale, un valore assai inferiore: 6- volta.

Una differenza simile, fra valore « fisico » e valore « spettroscopico », oltrepassa enormemente i limiti degli errori di osservazione e non può essere dovuta che a qualche causa di errore fondamentale.

Allora, per decidere quale sia il vero valore del potenziale di ionizzazione dell'argento, noi abbiamo applicato il nostro metodo della fiamma ⁽⁵⁾, operando sempre nelle stesse condizioni di esperienza per le quali determinammo i valori del potenziale di ionizzazione di alcuni elementi del gruppo delle terre rare ⁽⁶⁾ e dell'affinità dell'atomo neutro di iodio per l'elettrone ⁽⁷⁾.

Invece della perla di un sale di argento, noi abbiamo usato una sbarretta di argento metallico purissimo (Kahlbaum), la cui estremità colpita dal dardo della fiamma (2300°C), viene liquefatta e volatilizzata.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica fisica della R. Università di Firenze

(2) Nella seduta del 7 marzo 1926.

(3) FOOTE e MOHLER. « The origin of spectra ».

(4) A. G. SHENSTONE. Nature 112, 100, 1923.

(5) L. ROLLA e G. PICCARDI. Questi « Rendiconti »: vol. II, serie 6^a, sem. 2^o, fasc. 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 9 1925.

(6) L. ROLLA e G. PICCARDI. Questi « Rendiconti », 1926.

(7) G. PICCARDI. Questi « Rendiconti », 1926.

Osserviamo subito, che non è possibile evitare qualche piccolo sfavillamento del metallo fuso. In conseguenza di ciò il valore della costante K di equilibrio della reazione di ionizzazione, non risulta di una assoluta esattezza; infatti il valore di questa costante può variare entro certi limiti, sempre restando, nondimeno, dello stesso ordine di grandezza.

Noi abbiamo trovato, in varie esperienze, dei valori di K oscillanti fra $2,34 \cdot 10^8$ e $9,20 \cdot 10^8$, con un valore medio di $5,92 \cdot 10^8$. A questi valori di K corrispondono, pel potenziale di ionizzazione, dei valori oscillanti fra 7,37 e 7,67 volta, con un valore medio di 7,46 volta.

Questo valore, dato il metodo, si può dire che concordi perfettamente col valore determinato per via spettroscopica.

Ponendo inoltre nella curva dei potenziali di ionizzazione da noi costruita ⁽¹⁾, il valore 7,54 ed il valore 6-, noi osserviamo subito che il valore 7,54 si trova perfettamente a posto su tale curva, in armonia con l'andamento generale e con i valori dei potenziali di ionizzazione dei metalli nobili in modo particolare; mentre il valore 6-, si trova completamente fuori dalla stessa curva, in pieno disaccordo con l'andamento e con i valori di cui sopra.

In definitiva, poichè il valore 7,54 risulta dal limite delle serie spettrali, concorda bene col valore determinato sperimentalmente (con un metodo che particolarmente si presta allo studio dei fenomeni di ionizzazione dovuti soltanto alla temperatura) ed è in armonia con la curva dei potenziali di ionizzazione e coi valori dei potenziali di ionizzazione dei metalli nobili, esso è veramente da considerare come il valore esatto.

Mineralogia. — *Nuove ricerche sulla baritina di Racalmuto in Sicilia.* Nota ⁽²⁾ della dott.ssa CARMELA RUIZ presentata ⁽³⁾ dal Socio FERRUCCIO ZAMBONINI.

Incoraggiata dal prof. E. Quercigh, ho continuato ad interessarmi delle baritine siciliane ⁽⁴⁾ studiando due esemplari di questo minerale che, con la semplice indicazione generica di provenienza da « Racalmuto », fanno parte della collezione dell'Istituto di Geologia di questa Università e che vennero tempo fa gentilmente concessi in esame dal prof. Francesco Cipolla allora direttore di quell'Istituto.

(1) « Gazzetta chimica italiana » (in corso di stampa).

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Palermo, diretto dal prof. E. Quercigh.

(3) Nella seduta dell'11 aprile 1926.

(4) C. RUIZ, *Sulla baritina della miniera Giona (Racalmuto)*. « Rend. R. Accad. », III (1926) I.

In questi due campioni la baritina è accompagnata dai due minerali più comuni nei giacimenti di Sicilia: calcite in piccolissimi scalenoedri incolori e zolfo in bei cristalli bipiramidali che raggiungono anche qualche centimetro di lunghezza e presentano le caratteristiche note forme del minerale siciliano.

I cristalli di baritina sono molto tabulari secondo la base, sono riuniti in gruppi crestati, ma se ne trovano anche parecchi che rimangono per circa 1 mm. liberi e limitati da raccette ben misurabili. Hanno un colorito talora grigio-biancastro, spesso più o meno giallastro o brunastro e la lucentezza vitrea caratteristica.

Il minerale appare traslucido od opaco negli aggregati, mentre i frammenti di cristallini isolabili sono abbastanza trasparenti, analogamente a quanto si osserva nei campioni provenienti dalla miniera Giona già descritti. Esaminate al microscopio le laminette appaiono anche qui zonate; le zone più brune, prive di pleocroismo, sono nettamente separate da quelle quasi incolori, delimitando così i vari periodi di accrescimento con linee parallele al contorno, e devono anche qui la loro origine a inclusione di sostanze bituminose, rivelate dagli stessi fenomeni osservati nel minerale della miniera Giona.

Dei numerosi frammenti isolati quelli che hanno dato misure discrete sono una sessantina; in essi identificali le forme seguenti:

{001} {010} {011} {110} {102} {101} {307} {10.0.21} e la {10.0.11} dubbia; vi rinvenni le combinazioni:

{001}	{011}	{102}		
{001}	{011}	{10.0.21}		
{001}	{011}	{110}	{10.0.21}	
{001}	{102}	{011}	{110}	{010}
{001}	{011}	{102}	{101}	{110}
{001}	{011}	{307}		
{001}	{010}	{011}	{101}	{102}
{001}	{102}	{011}	{10.0.11}	
{001}	{011}	{110}	{10.0.11}	{307}
{001}	{011}	{10.0.11}	{307}	

Il pinacoide {001}, comune a tutti gl'individui, è sempre molto sviluppato, raramente piano, per cui riflette immagini multiple.

La {010} è stata identificata in pochi cristalli con faccette molto esili; la {011} è invece comunissima e meglio sviluppata; alquanto raro è il prisma {101} che spesso ha una sola faccetta ad una delle estremità di x.

La {102} è più frequente e raggiunge lo stesso sviluppo della {011}; ridottissima, nei pochi individui in cui fu notata, è la {110}; le faccette di sfaldatura che ho provocate con le dovute precauzioni riflettono immagini generalmente deboli, ma per lo più semplici e belle così da permettere, per

l'angolo $(110):(1\bar{1}0)$, misure assai precise che possono venir usufruite per il calcolo delle costanti.

Il prisma $\{307\}$ fu osservato in tre individui con faccette esili che riflettono immagini discrete e danno valori angolari alquanto concordanti coi teorici; quindi risulta nuovamente confermata per la specie questa forma che, osservata per la prima volta nei cristalli di Iberg (Harz) da Herschenz ⁽¹⁾ nel 1888 e poi da Lüdecke nel 1896 ⁽²⁾ e riscontrata nuovamente nel 1902 dal Samojloff ⁽³⁾ e più recentemente, nel 1907, da K. Zimányi ⁽⁴⁾ nei cristalli di Alsósajó (Comitat Gömör), era stata compresa fra le forme incerte da Goldschmidt ⁽⁵⁾.

La $\{10.0.21\}$, vicinale di $\{102\}$, è nuova per il minerale: la riscontrai in tredici cristalli, con faccette esili, riflettenti buone immagini. È nota la tendenza della baritina a dare facce vicinali nella zona $[010]$ e l'assenza della $\{102\}$ nei cristalli in cui si riscontra la $\{10.0.21\}$ è una riprova che trattasi di una faccia vicinale la cui posizione è però, come lo mostrano le misure, assai bene espressa dal simbolo suddetto.

La $\{10.0.11\}$ che sarebbe pure nuova per la baritina, è, analogamente alla precedente, una vicinale di $\{101\}$ e sostituisce quest'ultima nei tre frammenti in cui fu osservata: si presenta una sola faccetta esile che, misurata con la $\{001\}$ e con la $\{307\}$, dà valori angolari che determinano il simbolo suddetto, col quale io però, dato lo scarso numero di misure, non intendo, per il momento, se non indicare, con sufficiente approssimazione e semplicità di simbolo, la posizione di queste faccette.

I risultati delle misure che hanno servito ad identificare le forme descritte sono raccolti nella seguente tabella:

Angoli	Limiti	media	valori calcolati	differenze
$011:01\bar{1}$	$74^{\circ}.19' - 74^{\circ}.36'$	$74^{\circ}.31'$	*	—
$102:101$	$19.13 - 19.23$	19.16	$19^{\circ}.19'$	$-3'$
$110:1\bar{1}0$	$78.10 - 78.37$	78.24	*	—
$307:30\bar{7}$	$110.38 - 110.50$	110.44	110.43	$+1'$
$307:10.0.11$	$20.45 - 21.6$	$20.55 \frac{1}{2}$	21.3	$-7' \frac{1}{2}$
$102:10\bar{2}$	$102.18 - 102.26$	102.19	102.16	$+3$
$10.0.21:10.0.\bar{2}1$	$104.53 - 105.12$	105.4	104.59	$+5$

(1) HERSCENZ, *Untersuchungen über Harzer Baryte*. «Zeitsch. f. Naturwissensch. Halle», 61 (1888), 143.

(2) LÜDECKE, *Die Minerale des Harzes*. Berlin 1896.

(3) SAMOJLOFF, *Beiträge zur Krystallographie des Baryts*. «Bull. Soc. Imp. Nat. Moscou», 1902, 16, 105.

(4) ZIMÁNYI, *Ueber zwei Baryte vom Comitat Gömör*. «Zeitsch. f. Kryst.», 44, 162.

(5) GOLDSCHMIDT, *Atlas der Krystallformen*. Tex I, p. 145.

Scegliendo circa trenta fra le migliori misure dell'angolo $(011):(01\bar{1})$ e per $(110):(1\bar{1}0)$ comprendendovi anche i dati più attendibili ottenuti dalle superfici di sfaldatura prismatica, complessivamente cinquanta, ho ottenuto rispettivamente i valori medi di $74^{\circ} 31'$ e $78^{\circ} 24'$ da cui risultano le costanti:

$$a:b:c = 0.81558:1:1,31467$$

per la baritina di questi esemplari.

La densità, determinata picnometricamente su diverse porzioni di sostanza accuratamente scelte, ha dato i valori di 4.43 e 4.42 a 18° - 19° .

I saggi qualitativi dimostrano, come per il materiale della miniera Giona, che trattasi di baritina assai pura con tracce di calcio, di stronzio, di CO_2 e di sostanze organiche.

Quantitativamente ottenni da due determinazioni:

	o/o
Perdita a 500°	0.11
BaO	56.06
CaO	0.25
SrO	0.17
SO_3	43.51
CO_2	tracce
	<hr/>
	100.10

Anche in questo campione il calcare grigio azzurrastrò su cui si è depositata la barite risulta puro di bario e di stronzio.

Per la quasi identità che si riscontra nelle costanti cristallografiche, densità, composizione chimica, condizioni paragenetiche e tutti gli altri caratteri di questi campioni, in confronto di quelli descritti nella nota precedente (loc. cit.), credo si possa considerarli come provenienti tutti dalla miniera Giona; complessivamente essi rappresentano minerale abbastanza puro, cristallograficamente interessante e di origine evidentemente sedimentaria.

Geologia. — *Osservazioni geologiche sull'isola di Asinello e sugli scogli vicini (Carnaro).* Nota di GUSTAVO CUMIN presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. MILLOSEVICH.

L'isola di Asinello costituisce il prolungamento meridionale dell'isola di Lussino, dalla quale essa è separata da uno stretto largo appena 1600 metri; essa ha una superficie totale di 5.47 chilometri quadrati ed uno sviluppo costiero di 13.48 chilometri. Ad est di essa sorgono altri isolotti, detti localmente scogli, che rappresentano pure dei prolungamenti orografici dell'isola di Lussino, tali scogli sono: lo scoglio di S. Pietro che sorge di fronte ad Asinello - esso è il più grande di tutti misurando una superficie di 0.83 chilometri quadrati - lo scoglio Caprone che si trova tra quello di S. Pietro e l'isola di Lussino, le due Oriule (grande e piccola) con lo scoglietto Oriule ed infine lo scoglio Tasorta distante un centinaio di metri dall'isola di Lussino.

Questo piccolo complesso insulare, ultimo lembo italico del Carnaro meridionale, non è mai stato indagato geologicamente e solo qualche cenno del tutto generale dava notizie invero contraddittorie ⁽²⁾ sui vari terreni che lo costituiscono.

I terreni che appaiono su questi isolotti appartengono al cretaceo, all'eoene inferiore e medio, ed infine al pleistocene.

Il cretaceo s'inizia con rocce dolomitiche, intercalate qua e là da banchi calcarei. Le dolomie sono generalmente di colore grigio chiaro ed a grana minuta, possiedono una struttura saccaroide e sono ruvide al tatto. Qua e là s'incontrano dei banchi a grana più grossa, di colore bianchissimo. In tutte e due le varietà si notano dei cristalli porfirici tanto di calcite che di dolomite. I banchi calcarei che si notano tra le dolomiti, sono potenti al massimo un metro, hanno un colore cereo, struttura compatta e netta frattura concoide.

Le dolomiti affiorano esclusivamente sull'isola Asinello, esse formano lungo la costa orientale una fascia che da sud dell'abitato di S. Pietro dei Nembi gira ai piedi del Monte Guardia sino a formare la Punta Radovan; esse appaiono anche sul lato occidentale dell'isola dove costituiscono una striscia larga 50 metri circa.

(1) Nella seduta dell'11 aprile 1926.

(2) LORENZ R., *Geologische Recognisirungen im Liburnischen Karste und den vorliegenden Avarnerischen Inseln* in « Jahrb. K. K. Geol. Reichsanst. », vol. X. Wien 1859; WAAGEN L., *Geologische Aufnahmen im Kartenblatte Lussinpiccolo und Puntalonj*, in « Verh. K. K. Geol. Reichsanst. », A. 1905 pag. 244 e seg. Wien 1905.

Sopra alle dolomiti appare sulla costa orientale una pila di calcari bianchi, privi di fossili, potente nel complesso circa 30 metri; la struttura di queste rocce che appaiono altresì, in breve zona, nella parte nord-ovest dello scoglio S. Pietro, è semicristallina a grana minuta. Questi calcari non si rinvenivano nella parte ovest di Asinello, essi sono identici a quelli che in eguale giacitura si osservano tra i paesi di Lussinpiccolo e Lussingrande.

Le dolomiti, rispettivamente i calcari bianchi, sono ricoperti da una pila di calcari grigi, ora scuri ora quasi biancastri, di struttura talvolta compatta, tal altra semi cristallina a grana minuta. Questa pila di strati potente dai 40 ai 60 metri presenta qua e là dei banchi fossiliferi così p. e. su Asinello tra Val Persine e Punta Radovan, e su Oriule piccola presso la baia di Punta Circa. Nella parte inferiore dei calcari grigi predominano le radioliti come: *Radiolites acuticostata*, *R. radiosa*, *R. lesinensis* mentrechè in quella superiore si notano insieme a queste anche delle ippuritidi.

Si può così riferire questo complesso al *Turoniano* e forse nella sua parte superiore al *Senoniano*, mentre invece i calcari bianchi e le dolomiti vanno riferite al *Cenomaniano* superiore.

I calcari grigi sono i più diffusi di tutti, così essi appaiono su Asinello tanto nel rilievo del Monte Guardia, che lungo la dorsale occidentale, infine essi affiorano anche lungo la costa occidentale tra Val Golbocobach e Val Persenach. Gran parte dello scoglio S. Pietro è composto di questi calcari, e quelli di Caprone, Tasorta e le due Oriule sono formati esclusivamente da essi.

I terreni successivi affiorano esclusivamente su Asinello; quivi al tetto dei calcari grigi appaiono dei calcari bianchi o grigio chiari semicristallini, stratificati in banchi potenti da 0.70 ad 1 metro e che racchiudono resti, abbastanza frequenti di ippuritidi riferibili principalmente alle specie: *Hippurites cornuassinum*, *H. Toucasi* e *H. sulcatus*. I calcari ippuritici che vanno ascritti al *Senoniano*, sono potenti circa una quarantina di metri; essi affiorano ai piedi occidentali del rilievo del Monte Guardia, e sulla cresta delle colline occidentali, da dove si spingono poi sino a Val Persine.

Con i calcari ippuritici si chiude la serie cretacea; l'eocene è rappresentato nella sua parte inferiore (*Suessoniano*) dalla formazione di Cosina, costituita da calcari compatti, cerei, letteralmente gremiti da gasteropodi tanto che alcuni banchi sono delle vere e proprie lumachelle. Tra i banchi, potenti in media un metro, se ne notano alcuni di colore grigio scuro, e dove i fossili appaiono più numerosi e di colore biancastro. Di tali banchi se ne osservano alcuni nella cava aperta a nord del paese di S. Pietro. Se i fossili sono abbondanti, pure le specie sono poche e si riducono a: *Goniobasis characeum* Sta., *G. elatior* Sta. predominanti *Kalostoma tergestina* Sta., *Helix aff. cretacea* Tausch, *Stomatopsis*, sp. *Cerithium* sp. e *Turritella* sp.

Il secondo ed ultimo orizzonte calcareo è rappresentato dal *Parisiano* che si mostra costituito da calcari biancastri e grigio chiari a minuta strut-

tura cristallina. Tali rocce racchiudono piccole numulitidi ed alveoline come: *Nummulites planulata*, *Alveolina elongata*, *Assilina spira*, e *Orthophragmina sp.* I resti organici non sono molto abbondanti e generalmente non raggiungono dimensioni notevoli. Nel complesso tali calcari, potenti al massimo una trentina di metri, rappresentano la parte inferiore del Parisiano.

Il calcare liburnico affiora in due striscie che si estendono, separate dal calcare parisiano, nella depressione tra le due catene di rilievi che attraversano Asinello.

Il *Pleistocene* è rappresentato dalla terra rossa che si trova più o meno diffusa su tutti gli isolotti. Su Asinello essa si accumula a preferenza nelle depressioni; essa è scarsa sullo scoglio S. Pietro e su Caprone, manca quasi del tutto a Tasorta, mentre invece essa copre con uno strato potente da 1,5 a 2,5 metri le due Oriule; quivi essa ha un colore rosso mattone ed assume quasi aspetto di bauxite terrosa.

All'*Attuale* appartengono le formazioni ciottolose di spiaggia e le sabbie che si osservano qua e là, ma specialmente a Val Persine su Asinello ed a Val Pristega su Oriule grande. Sabbie e ciottoli sono spesso frammistati a letti di alghe marine ed appaiono sempre sovrapposti alla terra rossa con la quale specialmente le sabbie sono inquinate.

La sabbia di Val Persine è di colore grigio chiaro ed a granuli grossolani; essa è composta essenzialmente di calcare bianco e grigiastro, si notano inoltre notevoli quantità di tritumi di conchiglie e frammenti di alghe. Come componenti accessori appaiono in prima linea il quarzo in granuli a spigoli più vivi e subordinatamente dei feldspati, non mancano infine detriti di vetro, legno e scorie di carbone.

Di aspetto un po' diverso sono le sabbie di Oriule grande che hanno in genere un colore rossastro dovuto non tanto, come si nota al microscopio, alle impurità di terra rossa, quanto al colore rossastro che assumono numerosi granuli di calcare. Queste sabbie sono anch'esse essenzialmente calcaree, differiscono però da quelle di Val Persine, oltre che per il colore, anche per la maggior frequenza di granuli quarziferi e per la mancanza di resti d'alghe.

La tectonica non si presenta molto complicata; Asinello è costituita da una sinclinale il cui asse corrisponde circa alla depressione tra i due rilievi che percorrono l'isola. La cerniera di questa piega è occupata dai terreni parisiani, i più recenti, ai cui lati appaiono tanto ad est che ad ovest gli altri terreni più antichi. La parte occidentale dell'isola è formata da un anteclinale, la cui volta corrisponde all'affiorare dei terreni dolomitici; questa anteclinale è molto stretta ed inclinata. Il rilievo del Monte Guardia invece è formato dalla gamba orientale della sinclinale che attraversa l'isola.

Più semplice ancora risulta la tectonica dei vari scogli, dove in tutti si riscontra esclusivamente una pendenza di strati verso Nord-Est che si osserva e benissimo anche su Oriule grande, malgrado che L. Waa-

gen⁽¹⁾ dica non essere possibile notare la pendenza degli strati calcarei che la compongono.

Lo Scoglio S. Pietro, soltanto, fa in parte un'eccezione visto che nella sua parte settentrionale, lungo la costa ovest si notano pendenze in direzione opposta; ciò va ascritto al fatto che in questa zona passa l'asse di un'anteclinale che è in gran parte sommersa nel Canale di S. Pietro dei Nembi. La maggior estensione dello Scoglio è formata dalla gamba est di tale sinclinale, così il Monte Piccolo ed il Monte Grande e lo stesso vale per lo Scoglio Caprone.

Lo Scoglio Tasorta e le due Oriule, possono venir collegate, tectonicamente, insieme; il primo rappresenta parte di una gamba di anteclinale (gamba est), mentrè le seconde, fanno parte, pure di una gamba orientale ma di un'anteclinale successiva, la sinclinale che collega queste due pieghe è oggi sottomarina.

La morfologia costiera è abbastanza varia, e dipende sia dalla struttura litologica dei vari calcari, che dalla loro posizione tectonica. Queste influenze valgono si può dire solo per la morfologia di dettaglio, mentre che la formazione delle numerose insenature, abbondanti specialmente su Asinello, va ascritta alla passata azione erosiva continentale; infatti salvo rarissime eccezioni, alle singole insenature corrisponde nella parte emersa un solco vallivo la cui importanza è proporzionata all'ampiezza dell'insenatura medesima, sì che questa non rappresenta altro che la parte sommersa del solco erosivo.

La costa di Asinello è bassa e con piccoli scogli appena affioranti sul livello del mare, là dove gli strati sono inclinati debolmente verso mare, all'incontro essa è alta da 5 sino a 10 metri dove gli strati presentano le loro testate oppur come avviene sulla costa orientale, sotto il Monte Guardia sino a Punta Radovan, oppure dove essi sono fortemente inclinati verso mare, come si osserva p. e. in alcuni tratti della costa occidentale specialmente tra Val Giroca e Val Persenach, in linea generale la costa è più accidentata ad occidente, perchè più esposta ai forti marosi.

Le singole rocce subiscono l'azione marina in vario modo, così le dolomie sono profondamente cariate, la loro superficie è irta di punte aguzze che rendono malagevole il cammino e qua e là si osservano dei bacini più o meno ampi, vere marmitte marine. Il clivaggio della roccia e la sua struttura talvolta brecciata facilitano sottoscavi ed i conseguenti crolli con accavallamenti di blocchi - ciò si osserva p. e. a Punta Radovan ed in qualche breve tratto della costa ovest.

I calcari semicristallini e compatti, sia del Cretaceo che dell'Eocene presentano sulla costa forme rotondeggianti, i singoli banchi sono spesso, in seguito al clivaggio, disgregati in blocchi staccati gli uni dagli altri; al clivaggio devonsi ascrivere anche le incisioni più o meno profonde che si

(1) L. WAAGEN, op. cit., Wien 1905.

osservano qua e là, mentre che i numerosi fori rotondeggianti che si osservano in tali rocce sono dovuti allo svuotamento di sacche di terra rossa per opera del mare.

L'interno di Asinello è carsificato, ma non molto intensamente; la carsificazione si riduce a delle rocce solcate e sfioracchiate, mancano nell'isola doline e grotte. Più fortemente carsificate sono le superfici di terreno, dove la macchia mediterranea è stata distrutta, e di conseguenza la terra rossa è stata dilavata mettendo a nudo la roccia calcarea già precedentemente incisa, sulle antiche incisioni sono venute così a sovrapporsi le più recenti. Il rilievo del Monte Guardia è quello dove la carsificazione è più attiva e dove si notano nelle rocce dei solchi profondi anche più di un metro.

Lo Scoglio S. Pietro, ha la costa nord-occidentale, in seguito alla debole inclinazione degli strati, bassa e con numerosi frangenti; la costa sud-occidentale invece è più alta e non presenta accidenti morfologici degni di nota, la costa orientale invece si presenta quasi sempre notevolmente inclinata ed i piani di stratificazione formano numerosi lastroni. Su questo lato dello scoglio, circa all'altezza del Monte Grande si osserva al livello del mare una piccola galleria, accessibile alle barche solo a bassa marea e con mare calmo, si tratta di un'antica galleria carsica in parte oggi modificata dall'azione marina.

La carsificazione dello scoglio è debole, salvo la vetta del Monte Grande, dove gli strati affioranti s'ergono qua e là in piccoli spuntoni e, disgregandosi, hanno dato luogo a brevi campi di detrito.

Lo Scoglio Caprone non presenta caratteri degni di nota, la sua costa ovest è più bassa e meno ripida di quella est che presenta, come quella dello Scoglio S. Pietro, numerosi lastroni. Il suo interno è cosparso da blocchi scannellati e sfioracchiati qua e là, ma specialmente verso il vertice si accavallano assumendo maggiori dimensioni.

La costa dello Scoglio Tasorta è nettamente diversa a seconda dei singoli versanti; ad ovest essa è foggata a gradinata in seguito all'affiorare delle testate degli strati inclinati (25°) verso NE; ad est invece appaiono numerosi lastroni. Lo scoglio si presenta carsificato più intensamente di tutti, esso è percorso in tutta la sua lunghezza da una cresta che sovrasta il terreno circostante per circa 5-6 metri; essa è dovuta ad un banco roccioso più resistente. L'isolotto è quasi privo di terra rossa e gli strati rocciosi sono profondamente corrosi e sfioracchiati.

Molto differenti invece sono le due Oriule e ciò principalmente per la copertura di terra rossa che occupa il loro interno. La loro costa è a gradinate, però meno decise di quelle di Tasorta, ad ovest ed è invece bassa e con numerosi blocchi isolati ad est e ciò sempre in seguito al fatto che le due isole sono costituite da strati unicamente inclinati verso NE. Anche qui si osserva che le insenature maggiori sono in corrispondenza dei solchi aerei, mentre che le piccole sono dovute ad accidentalità della struttura roc-

ciosa. Un'eccezione a questa regola è data dalla insenatura di Punta Circa su Oriule piccola. La Punta Circa alta 8 metri sul livello del mare è collegata all'isola da una barra rocciosa, che ad alta marea si trasforma in una serie di frangenti; questa sbarra limita verso nord un'ampia insenatura che dovrebbe esser originata dall'azione marina intensa sopra banchi rocciosi di minor resistenza.

L'interno delle due Oriule è in gran parte ricoperto da terra rossa e solo verso i punti culminanti si notano spuntoni rocciosi, che mancano se no quasi totalmente.

Riassumendo i fatti esposti possiamo dire che l'isola di Asinello e gli scogli vicini sono costituiti da rocce prevalentemente cretacee, affiorando quelle eoceniche soltanto sull'isola principale. La loro morfologia costiera è il risultato di un'azione erosiva aerea precedente sulla quale si è poi innestata l'azione marina, varia a seconda della posizione degli strati e della loro struttura litologica.

I fenomeni carsici non sono molto sviluppati, ed essi acquistano maggiori intensità là dove, abbattuta la vegetazione spontanea, la terra rossa è stata dilavata mettendo a nudo la roccia sottostante che, già precedentemente carsificata, ha poi subito un'azione erosiva novella, che ha inasprito il carattere carsico già esistente.

Vulcanologia. — *Sulla distribuzione mensile delle eruzioni dei vulcani giapponesi accompagnate da alluvioni.* II Nota di F. STELLA STARRABBA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. DE LORENZO.

Negli annali dell'attività vulcanica del Giappone non sono rare le notizie di eruzioni accompagnate da lave di fango, da stravasi di acque raccolte in laghi craterici (frequenti per l'Asosan), da alluvioni, ecc. Sopra simili eruzioni, evidentemente, l'influenza delle precipitazioni atmosferiche è doppia; in quanto che all'azione indiretta, esercitata dalle acque filtranti sui focolari dei vulcani in questione, si aggiunge ancora l'azione diretta delle piogge e relative acque di lavaggio, che determinano le piene nei laghi craterici o le lavine sui fianchi dei vulcani, specie se di fresco ricoperti di ceneri, ecc.

È facile immaginare che, distribuendo le date di tali eruzioni su uno dei soliti diagrammi annuali, dovrebbe ottenersi una linea d'eruttività speciale, con massimi più marcati, in corrispondenza dei mesi piovosi. Poichè la diretta influenza delle piogge tende a compensare od a sopraffare gli effetti apportati dalle cause solite a perturbare la nettezza del rapporto fra

(1) Nella seduta del 7 febbraio 1926.

eruzioni e precipitazioni, la curva d'eruttività costruita utilizzando quelle speciali date dovrà tendere ad esagerare l'andamento caratteristico, a mas-

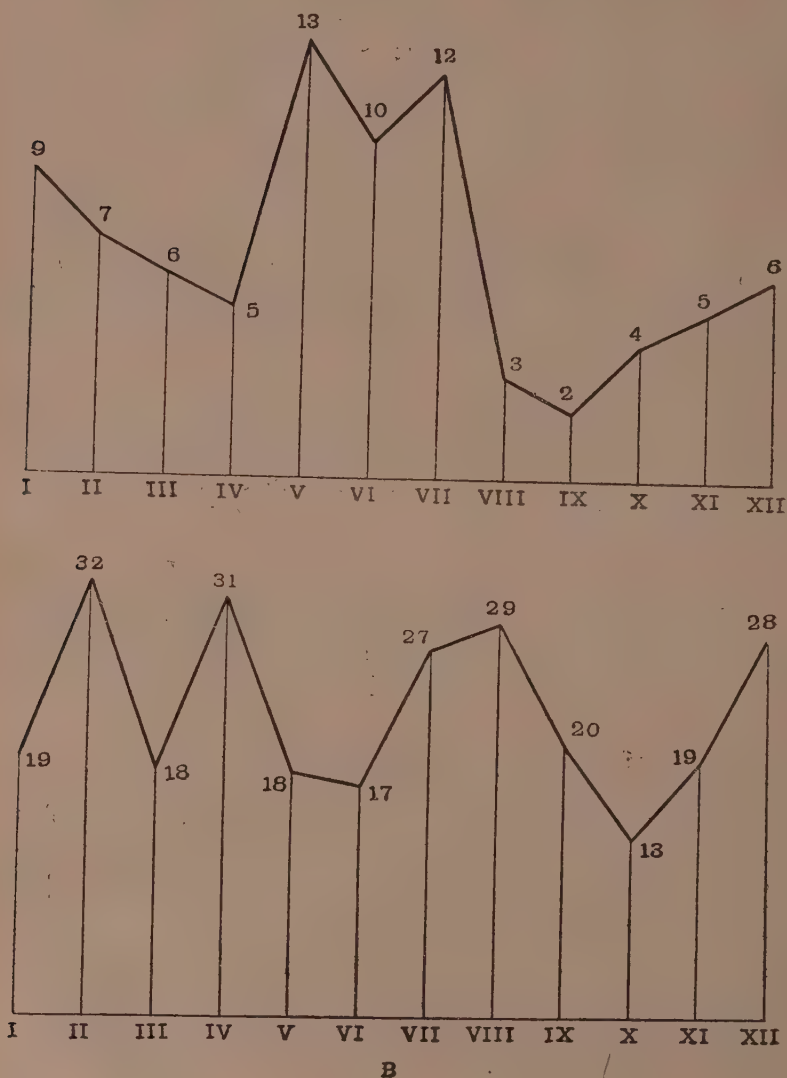


Fig. I.

simo estivo; ossia a riprodurre più da vicino, nella sua forma, la linea del diagramma della fig. 1-A, ricavato dalle registrazioni di H. Tanakadate ⁽¹⁾.

(1) F. STELLA STARRABBA, *Sopra due differenti diagrammi d'eruttività dei vulcani giapponesi*, « Rend. Lincei », 1° sem. 1926.

Ed effettivamente questo accade. Il catalogo di Sapper ricorda trentadue di tali eruzioni per undici vulcani giapponesi ed il numero di esse, per ciascun vulcano, è il seguente:

Usudake	2
Komagatake	2
Ywatesan	1
Bandaisan	1
Ywakiyama	1
Shiranesan	2
Asamayama	1
Asosan	16
Unzendake	2
Sakurashima	3
Kaimondake	1
	32

Tenendo separate le eruzioni dell'Asosan (che da sole raggiungono la metà del numero totale), la loro distribuzione per mese, è la seguente:

	G	F	M	A	M	G	L	A	S	O	N	D
Asosan (1)	1	3	0	0	1	2	4	2	0	0	1	2
Altri vulcani	0	2	3	2	1	0	2	5	1	0	0	0
	1	5	3	2	2	2	6	7	1	0	1	2

Il diagramma costruito con queste date, prese nel loro insieme, è rappresentato dalla fig. 2 e riproduce (accentuando leggermente il massimo estivo) quello tracciato sulle registrazioni di Tanakadate (fig. 1-A). Ossia la maggiore densità di eruzioni accompagnate da alluvioni si ha nei mesi estivi, salvo un massimo meno pronunziato nel mese di febbraio.

(1) Diversamente da quanto si osserva nel diagramma della fig. 5-B della mia precedente Nota, l'Asosan presenta per queste eruzioni un massimo spiccatamente estivo (luglio). La linea d'eruttività è — salvo i ritardi — quasi identica a quella individuale dell'Aso, già costruita in base alle registrazioni di Tanakadate (fig. 5-A).

Ma il fatto che nelle nostre considerazioni ha maggior peso consiste in questo: anche nel diagramma della fig. 2 si ripresentano i ritardi dei massimi, quando si metta in confronto con quello di Tanakadate (fig. 1-A). Precisamente, tale ritardo è di un mese per il massimo invernale (febbraio

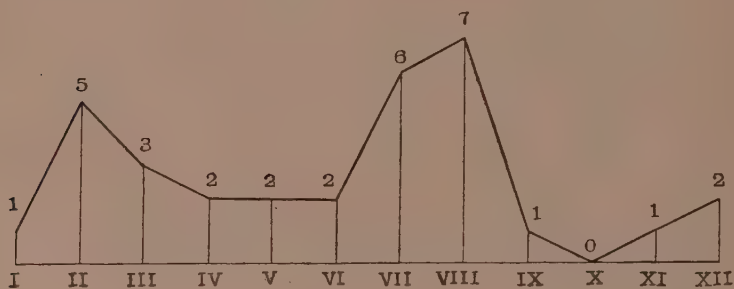


Fig. 2.

in luogo di gennaio) e di circa due mesi per il massimo estivo (luglio-agosto in luogo di maggio-giugno-luglio). Il massimo di luglio-agosto è sincrono al massimo estivo nel diagramma secondo i dati di Sapper (fig. 1-B).

In base a queste osservazioni ed a quelle della mia Nota precedente, si può concludere:

1. Che per i vulcani giapponesi è sempre caratteristica una crisi di eruttività in seguito alla stagione piovosa di primavera-estate.
2. Che le grandi eruzioni dei vulcani del Giappone (entro i limiti di precisione che consente l'elenco di Sapper) dimostrerebbero una certa indecisione dei massimi invernali ed un minor rilievo del massimo estivo. Ciò starebbe ad indicare una minore sensibilità alle infiltrazioni esterne.
3. Che i massimi d'eruttività del diagramma secondo i dati di Sapper presentano un sensibile ritardo in confronto al diagramma secondo le registrazioni di Tanakadate, registrazioni che riguardano, in massima parte, manifestazioni vulcaniche di minore entità ⁽¹⁾.
4. Che le eruzioni accompagnate da alluvioni (desunte sempre dal catalogo di Sapper) risentono l'influenza delle stagioni piovose con intensità maggiore di quanto non dimostri tutto il complesso delle eruzioni storiche del Giappone. Ma, a parte ciò, si manifesta nella loro distribuzione mensile il ritardo caratteristico della serie generale delle eruzioni storiche.

(1) In un diagramma di F. OMORI (V. DE MONTESSUS DE BALLORE, *La science sismologique*, Paris, 1907, 244-255) in cui si fanno risaltare le variazioni della frequenza sismica annuale nel Giappone, lungo la costa del Pacifico, è evidente un massimo in giugno-agosto.

In quello della distribuzione mensile dei sismi leggeri segnalati a Kyoto si ha una maggior frequenza in primavera; per quello dei sismi forti, invece, un massimo in agosto, ritardato rispetto al primo e seguito da un altro massimo invernale.

5. Che l'esistenza di questo ritardo (che rientra fra le accidentalità dei rapporti fra eruzioni e precipitazioni atmosferiche) rende più strette le analogie di comportamento dei vulcani del Giappone, da un lato, e del Vesuvio dall'altro.

Biologia. — *Cordoni oscuri e cordoni chiari nell'organo insulare di « Petromyzon marinus »*. Nota ⁽¹⁾ di GIULIO COTRONEI, presentata ⁽²⁾ dal Socio B. LONGO.

Lo studio del pancreas dei Ciclostomi era rimasto completamente oscuro, tanto controverse erano le notizie in proposito, fino a quando, mi sia lecito oggi il dirlo, io pubblicai, prima nel 1922 una nota preventiva, poi nel 1923 un lavoro in esteso, in cui dimostravo con ricerche eseguite nel *Petromyzon Planeri* e nel *P. fluviatilis*, che in questi Petromizonti era assente il tessuto esocrino, zimogenico, del pancreas, e l'organo era costituito unicamente di tessuto insulare o da suo equivalente. Fui anzi esplicito nel paragonare nel *P. fluviatilis* l'organo da me studiato a quelle isole dei Teleostei, che come per il primo scoprì il Diamare, sono isolate dal tessuto zimogenico (esocrino); e pertanto ritenni che il pancreas del *Petromyzon fluviatilis* fosse un vero (e soltanto) organo insulare. Le mie ricerche dimostravano, per la prima volta, che vi sono vertebrati (i più semplici) in cui delle due glandole del pancreas, se ne differenzia una sola, quella insulare, che come è oramai noto, è adibita alla funzione endocrina; ed è interessante constatare come la mia prima comunicazione venisse fatta contemporaneamente alla scoperta dei metodi estrattivi dell'insulina. L'anatomia comparata, che già con la lunga opera del Diamare, aveva spianato la via alla fortunata ricerca dei fisiologi americani, colmava per mezzo delle mie ricerche l'ultima lacuna, che ancora esisteva nella complicazione strutturale del pancreas, e dimostrava che delle due glandole di questo organo quella di cui l'organismo non può esimersi è proprio la glandola insulare.

Sette mesi dopo la mia prima comunicazione i miei risultati ebbero una implicita conferma da una comunicazione ⁽³⁾ del Mawas (1923), il quale,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia della R. Università di Siena. Il materiale di studio è stato pescato a Fiumicino, presso Roma.

COTRONEI GIULIO, *Ricerche sul pancreas dei Petromizonti*. Nota preventiva. « Bollettino Società dei Naturalisti in Napoli », vol. XXXIV. Tornata 13 agosto 1922. Pubblicato il 30 agosto 1922 (lavoro pervenuto alla Biblioteca della Stazione Zoologica di Napoli il 1° settembre 1922, come dal bollo di registrazione); *Ricerche sul pancreas dei Petromizonti*. Pubblicazioni della Stazione Zoologica di Napoli, vol. V, da p. 1-82, 1923.

(2) Nella seduta dell'11 aprile 1926.

(3) MAWAS S., *Recherches histologiques sur le pancreas de Cyclostomes*. « C. R. Assoc. des Anat. », XVIII Réunion (Lyon, 26-28 mars, 1923) (manca la data precisa di pubblicazione).

da parte sua, dichiarava che tutto il pancreas dei Petromizonti è soltanto un organo endocrino, ma, e questo per me risulta incomprensibile, non ammetteva che potesse parlarsi di tessuto insulare.

Più recentemente ⁽¹⁾ il Keibel (1925), al quale pare siano sfuggiti molti lavori sull'argomento, ammette, per quanto sotto una forma dubbiosa, che nel *Petromyzon fluviatilis* dei complessi cellulari oscuri possano rappresentare le isole.

Le isole, del resto, erano state già descritte da due autori italiani: il Giacomini (1900) ed il Pensa; ma il Giacomini aveva ammesso, nel *P. marinus* anche l'esistenza del tessuto zimogenico ⁽²⁾ ed il Pensa, nel *P. fluviatilis* si era limitato alla sola descrizione delle modalità delle isole.

La presente Nota, dà sotto una forma preventiva la conferma che anche nel *Petromyzon marinus* tutto il pancreas è esclusivamente formato di tessuto insulare, e d'accordo in questo col Mawas che ha potuto esaminare il *P. marinus*, prima del presente lavoro, che il tessuto esocrino, zimogenico, è assente, proprio come io avevo già dimostrato per il *Petromyzon fluviatilis* e per il *P. Planeri*: viene inoltre, e questo è lo scopo della presente Nota, rimosso l'unico ostacolo che io trovavo ancora sulla via delle mie indagini, rappresentato dalle osservazioni, in parte contrastanti, di un illustre morfologo, quale il Giacomini, in quanto oggi posso rendermi una ragione di questo dissenso.

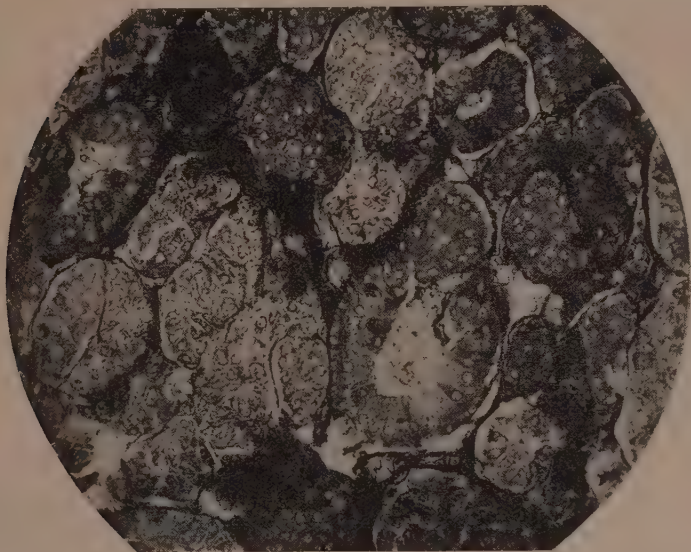
Anche in queste ricerche io ho potuto raggiungere la risoluzione basandomi sull'indagine comparativa con fatti già noti. Il pancreas del *Petromyzon marinus* si presenta coi medesimi caratteri di quello del *Petromyzon fluviatilis*; quindi anche per il *Petromyzon marinus* si tratta di un organo insulare da paragonare alle isole e più specialmente alle isole principali dei Teleostei: ma nelle isole dei Teleostei, Diamare aveva dimostrato fin dal 1899 l'esistenza di due cordoni insulari: cordoni oscuri e cordoni chiari; i quali non si debbono confondere con il tessuto zimogenico. Può essere questione se i cordoni oscuri e i cordoni chiari rappresentino o meno diversi stadi funzionali di una medesima entità morfologica; ma l'analisi istologica e sperimentale (Diamare, 1905) ha dimostrato che mai queste trasformazioni possono rappresentare uno stadio di transizione con il tessuto esocrino: *dunque nei Teleostei coesistono, in maniera però indipendente, da una parte il tessuto insulare coi cordoni chiari e oscuri, dall'altra il tessuto zimogenico.*

(1) KEIBEL, *Eröffnungsansprache*, pp. 3-21. «Verhand. d. Anat. Gesells.», 34, Vers. Wien, 1925.

(2) Pur ammettendo l'esistenza dei due tessuti glandulari del pancreas e che gli ordinari tubuli pancreatici continuino a funzionare, Giacomini dichiara che nei Petromizonti ogni secrezione del pancreas diviene interna, endocrina, come diviene interna, endocrina, anche la secrezione biliare del fegato dopo la oblitterazione del dotto coledoco.

Più di recente, dopo gli studi sull'insulina, sono state riprese dai ricercatori americani gli studi citologici sulle isole dei Teleostei (Jackson, 1922 e Bowie, 1924); ricerche che ribadiscono con nuovi metodi microtecnici i risultati già conseguiti dal Diamare, molti anni or sono.

Fatte queste premesse viene subito delineata l'impostazione del mio lavoro. Nel pancreas, o meglio nell'organo insulare di *Petromyzon marinus*, manca il tessuto zimogenico e le due formazioni descritte nel 1900 dal Giacomini sono entrambe due formazioni insulari: i cordoni oscuri e i cordoni chiari: proprio quelle due formazioni che si riscontrano nel tessuto insulare dei Teleostei.



La microfotografia dà un'idea dell'insieme dei cordoni chiari e oscuri di *Petromyzon marinus*: vi sono dei cordoni oscuri, di cui uno è ripiegato ad ansa intorno ad una lacuna sanguigna, che si vede essere in rapporto con quella capillare sanguigna; si vede anche una vescicola la cui cavità contiene corpuscoli sanguigni: si tratta di modalità del taglio microtomico, per cui gli spazi irrorati di sangue o contenenti capillari sanguigni, possono apparire come cavità chiuse rivestite da epitelio e che Giacomini aveva paragonato a vescicole tiroidee. Oltre questi cordoni oscuri che assumono più fortemente i colori e che rassomigliano di più alle isole a emazie, descritte anche recentemente dal Van Camphenhout (1925) negli embrioni di montone, si notano dei cordoni chiari, meno colorati: anche questi ultimi si presentano riccamente circondati e compenetrati, tra le circonvoluzioni

che questi cordoni possono presentare, da capillari sanguigni: anche per questi cordoni le mie osservazioni mi dimostrano che si tratta di formazioni tipicamente insulari, ma per quanto anche esse siano come ho già detto riccamente vascolarizzate, pure non mi è stato dato nelle osservazioni finora fatte di riscontrare in esse quegli ampî spazi ripieni di sangue che sono carattere delle così dette isole a emazie, dando, ben inteso, a tale espressione il significato già da me dato nei precedenti lavori e che viene ora ribadito nelle mie nuove ricerche.

Dato lo spazio riservato a questa Nota, non posso indugiarmi nella descrizione minuziosa delle due forme di cordoni: particolari descrittivi e considerazioni io rimando al lavoro in esteso: voglio aggiungere che il tessuto connettivo che io ho messo ben in evidenza con l'impiego del metodo del Mallory fa assumere all'organo insulare un aspetto capsulato che lo delimita dagli organi circostanti, come del resto aveva già descritto il Giacomini: una sottile rete connettivale accompagna i cordoni, delimitando nel tempo istesso i capillari sanguigni, sia tra cordone e cordone, sia tra le pieghe di uno stesso cordone. È utile tener presente questi fatti che riavvicinano l'organo in esame al tessuto insulare dei Teleostei.

Nelle mie precedenti ricerche io avevo bensì visto e descritto il diverso comportamento ai colori nei cordoni pancreatici del *Petromyzon Planeri* ma non avevo fatto attenzione a un medesimo comportamento nell'organo insulare di *Petromyzon fluviatilis*⁽¹⁾: le recenti ricerche di Keibel che descrive complessi cellulari scuri e chiari proprio nel *Petromyzon fluviatilis*, ci dicono che si tratta di un fatto che è comune a tutti i Petromizonti; che è, forse, più o meno accentuato in rapporto a determinate condizioni biologiche; tubi a cellule chiare e tubi a cellule scure descrive nel *Petromyzon marinus* anche il Mawas.

In conclusione, queste mie nuove ricerche estese al *Petromyzon marinus* confermano quanto io per il primo ho dimostrato nello studio delle altre forme di Petromizonti; che cioè *in questi animali manca la ghiandola esocrina zimogenica* del pancreas ed è presente solo il tessuto insulare (*Petromyzon fluviatilis* e oggi possiamo aggiungere *Petromyzon marinus*) o un suo equivalente (*Petromyzon Planeri*).

Sull'eventualità e sul significato da dare a possibili lumi o cavità nei cordoni insulari discuterò più ampiamente nel lavoro in esteso.

(1) Mi riservo di rivedere di proposito tale questione nel *Petromyzon fluviatilis*

Biologia. — *La struttura del corpo di « Peroderma cylindricum » Heller, in relazione alla « Teoria cellulare ».* Nota ⁽¹⁾ del dott. B. MONTEROSSO, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. A. Russo.

In una nota precedente ⁽³⁾ comunicavo che, fatta eccezione per qualche parte soltanto dell'organismo di *Peroderma cylindricum*, il corpo di questo Copepode risulta quasi esclusivamente di masse plasmatiche multinucleate, alle quali, per brevità, e senza intenzione di anticipare giudizio alcuno sul valore morfologico e specialmente sull'origine di esse, ho dato nome di *sincizii*.

Tale constatazione, da me fatta nel corso di varî studi, eseguiti su questo parassita, mi suggerisce le considerazioni che seguono:

I. Il reperto, da me ottenuto, si differenzia da qualsiasi altro simile, perchè la presenza delle masse sinciziali è veramente molto larga, a riguardo delle parti a struttura cellulare, e perchè, sebbene l'organismo sia parassita, appartiene ad un gruppo notevolmente elevato (Crostei) nella scala zoologica.

II. Se, fino ad oggi, si erano trovati organismi a struttura sinciziale (Alghe sifonate e Ficomietti) o con qualche organo intero a tessitura non cellulare (Bdelloidi), nessuno aveva osservato, che io sappia, un esempio, in cui, alla larga rappresentanza di sincizii, andasse congiunta la possibilità di differenziare i varî sincizii, esistenti nello stesso corpo. Difatti, in *Peroderma cylindricum*, per aspetto e per funzione, oltre che per posizione, le diverse masse protoplasmatiche sono nettamente distinte fra di loro ⁽⁴⁾.

III. L'assoluta prevalenza della massa sinciziale sulla massa cellulare, la distinzione morfologica e funzionale dei varî sincizii, costituenti il corpo del parassita, sfuggono alle valutazioni, che la teoria cellulare esige. Contrariamente al presunto fondamentale di questa teoria, la materia vivente, che costituisce i diversi organi del corpo di *P. cylindricum*, allo stato adulto manca di struttura cellulare, fuorchè, in ultima analisi, negli organi essenziali alla vita vegetativa: mucosa intestinale e gonadi. È evidente che i sincizii, formando interi organi, sostituiscono altrettanti tessuti, di cui hanno la funzione, ma non la natura. Tutto però ci dimostra che, nell'organismo

(1) Lavoro dell'Istituto di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparate della Regia Università di Catania, diretto dal prof. Russo.

(2) Nella seduta dell'11 aprile 1926.

(3) *Sulla prevalenza della struttura sinciziale nell'organizzazione di « Peroderma cylindricum » Heller.* « Rendiconti della R. Acc. d. Lincei », vol. III, fasc. 5°, 1926.

(4) Vedere la mia nota, avanti citata e quelle, che sono in essa richiamate.

del parassita, la divisione del lavoro fisiologico si avvera normalmente; ma la base morfologica di esso è costituita prevalentemente dai sincizii. Questo dato di fatto, osservato nell'età adulta del Copepode, ritengo non impedisca di attribuire a questi sincizii il significato cui sopra accennavo, anche se nelle età precedenti, a noi finora ignote, al posto dei sincizii si dovessero trovare dei tessuti, da cui ulteriormente derivassero i sincizii medesimi.

IV. Se al Sachs e all'Haberlandt ripugnava l'idea che il corpo di una *Caulerpa*, formato di una massa sinciziale, potesse considerarsi come omologo ad una cellula di pianta superiore, a maggior ragione sembra inopportuno omologare ciascuna delle masse sinciziali, costituenti il corpo del Peroderma, ad una semplice cellula, tanto più in quanto si tratta di un Artropode, sebbene allo stato parassita.

V. La veduta, messa avanti da qualche istologo (Levi), che l'individualità cellulare persista potenzialmente nel sincizio, viene in parte confermata dai miei reperti. Come ho dimostrato difatti nei lavori precedenti, le zolle sinciziali celomiche e qualche altro organo, avente natura sinciziale, ma non tutti, hanno funzione globuligena, cioè danno origine, con speciale processo, alle cellule ameboidi circolanti del succo celomico, le quali dunque, se costituiscono uno dei pochi componenti del corpo, aventi natura cellulare, derivano dal dissolversi di una massa plasmatica multinucleata.

VI. Dalle precedenti considerazioni emerge, ritengo, la possibilità di portare qualche nuova luce sul problema, tanto dibattuto, della dignità individuale dei sincizii ⁽¹⁾. Indipendentemente dall'origine, che le masse mul-

(1) L'indole del presente lavoro e le esigenze dello spazio non consentono di registrare tutte le opere consultate. Debbo però ricordare che più specialmente mi sono valso delle Memorie e dei Trattati seguenti:

DELAGE Y., *La structure du protoplasma et les théories sur l'hérédité et les grands problèmes de la Biologie générale*. Paris, 1895.

DONCASTER L., *Introduzione allo studio della Citologia*. Trad. del prof. Cognetti De Martiis, 1925.

ENRIQUES P., *La teoria cellulare*. Bologna, 1911.

FUSARI R., *Istologia generale e tecnica istologica*. Roma, 1909.

GRASSI B., *L'interpretazione di Giglio-Tos dei fenomeni fondamentali della vita*. Ciriè, 1925.

HEIDENHEIN M., *Plasma und Zelle*. Jena, 1907.

HERTWIG O., *Allgemeine Biologie*. Jena, 1906.

JORDAN-FERGUSON, *A text-book of histology*. New-York, 1917.

VON KÖLLIKER A., *Eröffnungsrede der ersten Versammlung der An. Gesellsch. in Leipzig*. «An. Anz. II Jahrg.», 1887.

LEVI G., *L'individualità delle cellule persiste in potenza nei sincizii*. «Mon. Zool. It.», XXIX, 1918.

PENSA, *Il problema morfologico*. «Rivista di Biologia», IV, 1922.

Id., *Trattato di Istologia generale*. Milano, 1925.

POLICARD A., *Précis d'Histologie physiologique*. Paris, 1922.

POLL H., *Zellen und Gewebe des Tierkörpers*, in «Kultur der Gegenwart. Zellen-und Gewebelehre», II: Zool. Th., 1913.

tinucleate, costituenti il corpo del Peroderma, possano avere — particolare questo, che, a mio giudizio, non potrebbe alterare il valore dell'argomentazione che segue — credo, in base ai dati di fatto messi in evidenza nel presente e nei precedenti scritti, essere autorizzato ad affermare che un sincizio può considerarsi come analogo o tendente all'analogia con un tessuto.

Accettato tale criterio d'analogia col tessuto, siccome un sincizio, per posizione e per complessità di rapporti può spesso rassomigliarsi ad una cellula, mentre può paragonarsi ad un tessuto, anche, per posizione, rapporti, e, dentro certi limiti, per costituzione morfologica ed origine (per quanto anche la cellula, per questi ultimi coefficienti, ma forse men bene, possa avvicinarsi) ritengo lecito ammettere, almeno in linea generale, che una massa di materia vivente a struttura sinciziale, tenda ad essere, o sia in parte, omologa ad un tessuto. La contemporanea esistenza dei due caratteri, analogia ed omologia (anche se allo stato di tendenza), che di solito sono antitetici, potrebbe esprimersi adoperando con senso opportuno una parola del linguaggio geometrico, e dire: *il sincizio è equivalente ad un tessuto*.

Ulteriori dati di fatto, che in questo od altro organismo si troveranno, forse ci porranno in grado di definire la dignità precisa del sincizio, in rapporto alla cellula e al tessuto, propriamente detti, e non è improbabile che esso assurga ad un grado intermedio tra la cellula e il tessuto.

VII. Se il reperto esposto nel presente scritto è contrario alla teoria cellulare, presa in senso stretto, non parmi di ugual significato di fronte a quella teoria cellulare, che anche per necessità mentali e didattiche, sostengono i più autorevoli istologi e biologi moderni. Difatti non possiamo perfettamente uniformarci all'idea di O. Hertwig, che tendeva a considerare le *Sifonali* e le *Foraminifere* quali organismi pluricellulari, sebbene crediamo di dover elevare la dignità delle masse plurinucleate fin *quasi* al livello del tessuto. Non si elimina così di certo lo stato di disagio in cui, di fronte all'esistenza dei sincizii, si dibatte la teoria cellulare; ma si ribadisce sempre più l'*opportunità* di lasciare ancora provvisoriamente la cellula al primo gradino di individualità morfologica. La chimica odierna non ha bandito il concetto di atomo, pur riconoscendo ad esso un valore diverso di quello che vi assegnava fin pochi anni or sono.

Pur astenendoci da considerazioni, forse ancora premature, è ormai nel fondo delle nostre convinzioni, che la cellula sia troppo complessa per rappresentare realmente l'elemento fondamentale della sostanza vivente. Inoltre, alla cellula evidentemente va assegnata, non una funzione elementare, ma un « complesso elementare » di funzioni; al tessuto compete quindi un complesso più vasto; al sincizio probabilmente, in prosieguo di tempo, potrà

PRENANT, BOUIN, MAILLARD, *Traité d'Histologie*, tome I^e, Paris, 1904, tome II, Paris, 1911.

RUFFINI A., *Lezioni di Morfologia e di Biologia generale*. 1919-1920.

WILSON E. B., *The Cell in development and inheritance*. London, 1902.

riconoscersi un complesso intermedio, ma più vicino a quello del tessuto, con ciò stesso confermando il valore del dato morfologico, il quale già di per sè solo designa il sincizio come qualcosa più della cellula e poco meno del tessuto.

*
* *

Prima di chiudere il presente scritto, che si deve considerare come il sommario, destinato a più ampio svolgimento, di un'interpretazione, indubbiamente fra le più complesse e difficili, che si presentino al biologo, sarà bene sgombrare il terreno da qualcuna delle più ovvie ragioni di dubbio, che possano eventualmente rendere perplesso il lettore.

È il Metazoo, che presenta la struttura accennata, in condizioni fisiologiche tali, da autorizzare le illazioni presentate? La risposta non può essere equivoca, se si considera il parassitismo come uno stato fisiologicamente normale, per quanto particolare. Va aggiunto subito, che ho avuto la fortuna di non limitare le mie ricerche al Copepode perfettamente adulto, ma ho potuto estenderle ad un'età precedente, quantunque non molto precoce. Del resto i parassiti da me sezionati — ed ora rappresentano un numero notevolmente alto — sono stati fissati per tutto il periodo sessuale, che deve essere abbastanza lungo, com'è chiaramente indicato dal fatto, che ne ho trovato con fili ovigeri (esterni) ripieni di ova non ancora embrionate, di ova in tutte le fasi dell'embriogenesi, con *Nauplius* pronti a sgusciare, con ova già vuote, con fili ovigeri vuoti e in dissolvimento o addirittura mancanti. In questi ultimi casi ho rinvenuto l'utero zeppo di ova, relativamente grossissime e le ghiandole del guscio turgide di sostanza specifica, coagulata dai reagenti. È presumibile quindi che l'ovificazione, in un individuo, si ripeta. Del resto, come dimostrerò in altro lavoro, tutto il processo di deutoplasmagenesi si svolge dentro l'utero, e in tempo piuttosto lungo. Ora, in qualsiasi caso, la struttura degli elementi anatomici è costante, o presenta lievissime variazioni.

Pertanto anche se la detta struttura sinciziale fosse secondaria e la sua durata si restringesse al periodo sessuale, dall'inizio alla fine, sarebbe, ritengo, lecito, assumerla come dato di fatto normale, sia morfologicamente che fisiologicamente. Nei lavori precedenti, ancora, ho messo in evidenza le specifiche attività di alcuni, se non di tutti, i sincizii: quindi nessun dubbio deve cadere sulla funzionalità di essi, tanto più che l'organismo, quale espressione più sicura e tangibile della sua piena vitalità, ci offre il tubo digerente in pieno lavoro e le appendici cefaliche, a cui ho potuto assegnare funzione respiratoria ed elaboratrice di sostanze nutritizie, in perfetta funzionalità.

Restano pertanto a definire le cause biologiche, per cui si è stabilita la prevalenza della struttura sinciziale sulla cellulare; questione questa, che pur potendo mettersi in relazione collo stato parassitario del Copepode, presenta estrema difficoltà, nè poteva entrare nei limiti del lavoro.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell' 11 aprile 1926

- ABETTI G. — Il Assemblée generale dell'Unione Astronomica Internazionale. Cambridge, 14-22 luglio 1925 (Estr. dal periodico «L'Universo». Anno VII, 1926). Firenze, 1926. 8°, pp. 1-11.
- BASILE C. — Moto perpetuo illustrato. Messina, 1926. 8°, pp. 1-X, 1-37.
- DE MARCHI G. — La produzione di energia elettrica in Italia nell'anno 1924 (Estr. dagli «Annali dei Lavori Pubblici». 1925, fasc. IX). Roma, 1925. 8°, p. 135.
- ELLSWORTH L. — Impressioni sul Grand Canyon e riflessioni che esso ispira (Estr. da «L'Universo». Anno VII). Firenze, 1926. 8°, pp. 1-3.
- FERRARI F. — Dei cementi economici d'uso generale (Estr. dalla Rivista «Le Industrie del cemento». N. 5, 1925). Casale Monferrato, 1925. 8°, pp. 1-12.
- GENIE A. — Commemorazione letta dal Socio Federico Sacco (Estr. dagli «Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino». Vol. LX, pp. 307-310). Torino, 1926. 8°.
- GRASSI B. — Commemorazione di Battista Grassi, tenuta dal Prof. Splendore A. (Estr. dagli Atti di «Ars Medica». Anno II, n. 4, pp. 161-175). San Paolo del Brasile, 1925. 8°.
- ISSEL A. — Commemorazione di Arturo Issel, tenuta da Federico Sacco (Estr. dal «Bollettino del R. Ufficio Geologico d'Italia». Vol. XLIX). Roma, 1923. 8°, pp. 1-24.
- IVALDI G. — Sulla erroneità della teoria relativistica di Einstein (Estr. dal Giornale «Il Monitor Tecnico». Anno XXXI). Milano, 1925. 8°, pp. 1-28.
- KLEIN F. — Commemorazione di Felice Klein letta dal Socio Ernesto Pascal (Estr. dal «Rend. della R. Accad. di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli». Vol. XXXI, pp. 144-147). Napoli, 1925. 8°.
- MAZZONE-SANGIORGI G. — Saggio d'una nuova teoria generale per il moto delle acque e degli altri fluidi. Teoria degli stramazzi. Roma, 1926. 8°, pp. 1-48.
- PARIS M. — Prove su raddrizzatori termionici a bassa tensione (Estr. da «L'Elettrotecnica». Vol. XII, n. 30). Pisa, 1925. 8°, pp. 1-15.
- PEARL R. — The Reading of Graduate Students (Repr. from the «Scientific Monthly». Vol. XXI, pp. 34-44). S. I., 1925. 8°.
- PEARL R. and REED J. L. — A Life Table Nomogram (Repr. from the «American Journal of Hygiene». Vol. V, pp. 330-334, 1925). S. I., 1925. 8°.
- PHELPS ALLIS E. — On the Origin of the V. Shaped Branchial Arch in the Teleostomi (From the «Proceedings of the Zoological Society of London». 1925, pp. 75-77). London, 1925. 8°.
- PICCIONE M. — Battaglie per l'aeronautica militare. Roma, 1926. 12°, pp. 1-23.
- PICCIONE M. — Memento a la guerra nell'aria (Seguito a la guerra futura). Roma, 1926. 12°, pp. 1-23.
- PISTOLESI E. — Lo stato attuale ed i prossimi sviluppi della tecnica aeronautica (Estr. dall'«Annuario della R. Università di Pisa». Anno 1925-26). Pisa, 1926. 8°, pp. 1-21.
- RIVERA V. — Trasformazioni indotte dai raggi X in tessuti tumurali vegetali (Estr. dalla «Rivista di Biologia». Vol. VIII, fasc. I). Milano, 1926. 8°, pp. 1-14.
- SACCO F. — Cascate del Piemonte (Estr. dalla Rivista Turistica «Pro Piemonte». 1925). Torino, 1925. 8°, pp. 1-18.
- SACCO F. — Cascate Valdostane (Estr. dal Bollettino «La Flore Valdôtaine». N. 18). Aosta, 1925. 8°, pp. 1-23.
- SACCO F. — Cascatelle (Estr. dalla «Primavera Italica». IV, 1925). Torino, 1925. 8°, pp. 1-11.
- SACCO F. Crepacci glaciali (Estr. dalla Rivista «L'Escursionista». Anno XXVI, nn. 8-9). Torino, 1925. 8°, pp. 1-16.
- SACCO F. — Doms de Gianas di Scampilis (Perdasdefogu) (Estr. dagli «Atti della Reale Accad. delle Scienze di Torino». Vol. LXI, pp. 165-172). Torino, 1925. 8°.

- SACCO F. — Geoidrologia dei pozzi profondi della Valle Padana. Torino, 1924. 8°, pp. 1-180.
- SACCO F. — Gorgie del Piemonte (Estr. dalla Rivista Turistica «Pro Piemonte». Anno V). Torino, 1925. 8°.
- SACCO F. — Il glacialismo nelle valli dell'Orco e della Soana (Estr. dal «Bollettino del Comitato Glaciologico Italiano»). Selci, 1925. 8°, pp. 1-32.
- SACCO F. — Il glaciovenato della Maddalena (Colli Torinesi) (Estr. dagli «Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino». Vol. LXI, pp. 124-129). Torino, 1926. 8°.
- SACCO F. — Il lago Santo (Estr. dal Vol. «Il lago Santo»). Roma, 1924. 8°, pp. 1-12.
- SACCO F. — Il Pliocene marino sotto Cesano Maderno (Monza). (Estr. dagli «Atti della Reale Accad. delle Scienze di Torino»). Vol. LX, pp. 229-249). Torino, 1925. 8°.
- SACCO F. — Il solco di Equi (Alpi Apuane) (Estr. dalle «Memorie della Accademia Lunigianese di scienze "Giovanni Capellini"»). Vol. V, fasc. IV, pp. 129-136). La Spezia, 1924. 8°.
- SACCO F. — L'età degli argilloschisti ofitiferi dell'Appennino (Estr. dagli «Atti della Reale Accad. delle Scienze di Torino»). Vol. LXI, pp. 23-52). Torino, 1925. 8°.
- SACCO F. — La fronte del ghiacciaio di Verra (Valle di Ayas) nel 1923 (Estr. dal «Bollettino del Comitato Glaciologico Italiano». N. 6). Selci, 1925. 8°, pp. 1-6.
- SACCO F. — Le dighe e la geologia (Estr. dalla «Rivista mensile dell'Associazione per le acque pubbliche d'Italia»). Milano, 1925. 8°, pp. 1-14.
- SACCO F. — Le piramidi delle Fate (Estr. dalla Rivista «Il Secolo XX»). S. d. 8°.
- SACCO F. — Le regioni petrolifere dell'Emilia (Estr. dal «Bollettino della Società Geologica Italiana». Vol. XLII, pp. 415-453). Roma, 1924. 8°.
- SACCO F. — Le rivoluzioni geologiche (Estr. dal «Bollettino della Società Geologica Italiana». Vol. XLIII, pp. 81-93). Roma, 1924. 8°.
- SACCO F. — Le sentinelle rocciose della Val di Susa. (Estr. dalla Rivista «Gio-
vane Montagna». Anno XI, n. 12). Torino, 1925. 8°, pp. 1-8.
- SACCO F. — Les oscillations glaciaires (Estr. du «Livre Jubilaire de la Société Géologique de Belgique»). Liège, 1924. 4°, pp. 1-12.
- SACCO F. — Marmitte dei Giganti (Estr. dalla Rivista l'«Eursionista». Anno XXVII, nn. 3, 4, 5). Torino, 1925. 8°, pp. 1-19.
- SACCO F. — Monviso (Estr. dal «Club Alpino Italiano». Anno XLIII, n. 7, pp. 161-167). Torino, 1924. 8°.
- SACCO F. — Nelle crepaccio glaciali (Estr. dalla Rivista l'«Eursionista». Anno XXVII, n. 12). Torino, 1925. 8°, pp. 1-7.
- SACCO F. — Nelle regioni petrolifere dell'Appennino Settentrionale (Estr. dalla Rivista mensile del Touring Club Italiano «Le Vie d'Italia». 1924). Milano, 1924. 8°, pp. 1-12.
- SACCO F. — Orografia, Geologia, Mineralogia e Glaciologia del parco nazionale del Gran Paradiso (Estr. dalla Monografia del «Parco Nazionale del Gran Paradiso». Pp. 59-77). Torino, 1925. 8°.
- SACCO F. — Resti dell'uomo preistorico nelle colline di Torino (Estr. dagli «Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino»). Vol. LIX, pp. 429-440). Torino, 1924. 8°.
- SACCO F. — Schema geologico dell'Istria (Estr. dal periodico «L'Universo». Anno V). Firenze, 1924. 8°, pp. 1-49.
- SACCO F. — Sopra le nubi (Estr. dalla «Primavera Italiana». Vol. VIII-IX). Torino, 1925. 8°, pp. 1-19.
- SACCO F. — Sorgenti (Estr. dalla Rivista «L'Eursionista». Anno XXVI, n. 11). Torino, 1924. 8°, pp. 1-10.
- SACCO F. — Torri alpine del Piemonte (Estr. dalla Rivista Turistica «Pro Piemonte», 1926). Torino, 1926. 8°, pp. 1-12.
- SEVERI F. — Geometria proiettiva. 2ª edizione. Firenze, 1926. 8°, pp. 1-381.
- VALLAURI G. — Induttanze variabili (Varimetri) (Estr. da «L'Elettrotecnica». Vol. XIII, n. 33). Pisa, 1925. 8°, pp. 1-17.
- VELASCO DE PANDO M. — Memoria sobre la elasticidad y resistencia de las piezas prismáticas, cuyo eje es una curva plana, cargadas normalmente a su plano. Madrid, 1917. 4°, pp. 1-26.